物理科学実験法

小方　厚

平成 16 年 8 月 18 日

目 次

第 1 章　はじめに
実験とは

1.1　実験とは

物理に限らず，自然科学・理工学の研究方法には**理論と実験**がある．最近では，これに第 3 の分野として**シミュレーション** simulation を挙げるひともいる．

実験とは，理論が正しいことを証明することを念頭に，理論が予測する現象を実現させようと試みることである．この結果理論が正しいということになるかもしれないが，理論の矛盾が明らかになるかもしれない．後者の場合でも実験の価値が下がるわけではない．ただし「正しい」ことを主張するよりも「正しくない」ことを主張する方がずっと難しい．

実験で何を実証するかはときと場合によって異なる．自分でなにか理論を組み立て，自分で実験するというのは理想的かもしれないが．今の世の中ではなかなか難しい．現在は実験の技術が細分化し，各自がそれぞれの得意な技術を活かして他人のたてた理論を実験するのが普通である．自分で情報を集め (ネタを探し)，誰かがおもしろそうなことをいっているから実験してみるということもあり得る．しかし外から頼まれたり，命令されたりすることが実験の動機になることの方が多い．企業の研究所，大学の研究室等に就職しても，下っ端のうちは上司が何を実験すべきかを決めてくれるのが普通である．

いわゆる学生実験は，シナリオ通りにことが運ぶことが前提になっている．このような実験は，学習という目的のために必要なだけである．授業に組み込まれた学生実験はつまらないが，卒業研究 (卒論) のための実験はおもしろいといわれるが，もっともなことである．このふたつには，自動車教習所の中で車を転がすのと，道路地図を見ながらドライブに遠出するくらいの差がある．しかしドライブができるためには (ほんとうの実験をするには)，教習所通い (学生実験) も必要なことは理解できるであろう．

冒頭に第 3 の方法としたシミュレーションは日本語では模擬実験といわれる．この講義では，物理あるいは自然科学・理工学の研究方法を紹介している．他の分野，たとえば社会科学では実験できない問題も多く，計算機によるシミュレーションはそのような場合にも威力を発揮する．現在では，シミュレーションというと研究対象の数学モデルをつくり，計算機で計算することが多い．多くの場合，数学モデルは時間と場所を変数とする微分方程式で，これを数値的に解く．例えばプラズマ現象は，電磁場中の個々の荷電粒子の運動に還元できる．このための計算コードに **PIC** particle-in-cell という方法がある．この方法では空間を格子点であらわし，個々の格子点に電磁場を割り付ける．一方個々の粒子の位置と速度のこれらの電磁場による変化を求める．粒子の位置と速度が変わると電磁場も変わるので，細かい時刻でこれらの相互作用を計算していくことになる．実際の現象は連続的だが，数学モデルでは離散化し，微分方程式は差分方程式であらわす．

シミュレーションは，従来の理論研究手法にはなじまない，複雑性の支配する現象に威力を発揮すると期待されている．また，シミュレーションのために，**スーパーコンピュータ**といわれる超高速計算機の進歩を続けている．

1.2　実験の流れ

実験による研究を順序立てて書くとつぎのようになる．

1. 動機
2. 調査
3. 実験パラメーターの決定と実験結果の予測
4. 資金調達
5. 実験の場所探し
6. チーム作り
7. 設備/機材/材料の調達
8. 実験
9. データ整理/データ処理
10. 理論との照合/理論的説明
11. 学会での実験結果の報告
12. 出版

動機についてはすでに述べた．しかし誰かがすでに同じことをやっているかもしれない．そのときは実験を繰り返す必要はないし，繰り返す価値もない．また自分がイメージしているのとまったく同じでなくても，同じようなことをやっている例は必ずと言っていいくらい，ある．このような先例を参考にしない手はない．このために 2 の調査が必要である．

この調査とは主として図書館で文献 (主として雑誌に出ている論文) を調べることである．図書や雑誌の解説記事は 2 次論文といい，1 次論文をそのみちの権威がまとめたものである．1 次論文は初めて研究成果を発表した論文である．まず 2 次論文でおおきな流れをつかみ，そこに挙げられている参照文献 (1 次論文) をあたるのがよい．ただしこの方法では最新の情報を得ることはできない．最新の情報を得るには，1 次論文を掲載する雑誌をまめにチェックしなければならない．最近ではウェブで雑誌の目次程度なら調べることができる．

また学会という，同じ分野の研究者が集まって情報をやりとりする機会があり，ここでは論文として発表する以前の情報が手にはいる．とくに学会に行くまでもなく，友達づきあいをよくしておけば，いろいろな情報が入ってくる．

つぎにやるべきことは実験の予測である．欲しい結果を得るためには、どのような実験パラメータが必要かを計算してみる．あるいはパラメーターを仮定して得られる実験結果を計算機シミュレーションで予測する．これは 4-6 の段階に進むために是非とも必要なステップである．

つぎの 4-6 は並行に行うのがふつうである．下っ端の研究者はこの段階には関与しないこともある．しかし誰かがこの苦労をしていることは理解しておく必要がある．まず実験の資金は空から降ってくるわけではない．大学や政府機関の研究室では研究計画を書類にし，しかるべき申請を行う．計画が採用されても，申請額の 100% が認められるとは限らない．企業の研究室の場合も企業の合意がなければ研究にお金を使うことはできない．

この段階でも，よい友人がいて，いろいろ相談できれば，仕事はおおいにはかどる．なるべく広い分野に多くの友達を作るように努力しておくことである．もちろん,「持ちつ持たれつ」であるから，逆に友達から相談を持ちかけられたら親切に対応しなければならない．段階 7 でも設備・機材の貸し借りができれば大いに助かる．

8 以下もほとんどの場合一筋の流れではない．データ整理/データ処理や理論との照合の結果実験をやり直すこと (10,11 から 9 に戻ること) はごく一般的である．8 に戻ることもあれば，お金が足りなくなって 4 に戻ることもある．すごろくのようなものだが，もっと悪い．すごろくには上がりがあるが，実験では結果を出版してからまた続きをやることも一般的である．

実験結果は学会で発表する．また 1 次論文として雑誌に発表する．1 次論文を載せる雑誌は決まっていて，雑誌の中にもランクがある．よい雑誌に掲載されれば世界的な評価を受けることができる．論文を編集者に送ると，編集者はそれを閲読者 (レフェリー) に送る．レフェリーは論文が掲載に値するか否かを判断する．レフェリーの OK があって初めて出版の運びとなる．レフェリーは多くの場合研究上の競争相手であって，なんだかんだと文句を付けて，出版させまいとするひとも中にはいる．このへんに駆け引きが必要なのは，ほかの仕事と同じである．あまり学術的ではないが,「特許」という制度もある．

1.3 実験としての環境づくり

別な切り口として，実験のための環境作りがある．たとえば

1. 高温・低温の環境.
2. 高圧・低圧の環境.
3. 電磁場の大きい，あるいは小さい環境.
4. 振動の少ない環境.
5. 音響の少ない環境.
6. 塵埃の少ない環境.

などである．ここでは，1，3 については触れていない．また 2 の高圧と，音響についても触れていない．ただし低圧すなわちいわゆる真空については 1 章を設けた．振動と塵埃については「光学技術」の章で触れるが，この環境は他の分野でも必要である．

1.4 安全への配慮

多くの実験は危険をともなう．重いものを持ち上げてぎっくり腰になるとか，重いものを足の上に落とすとかは，目に見える危険である．なお重量物の運搬に

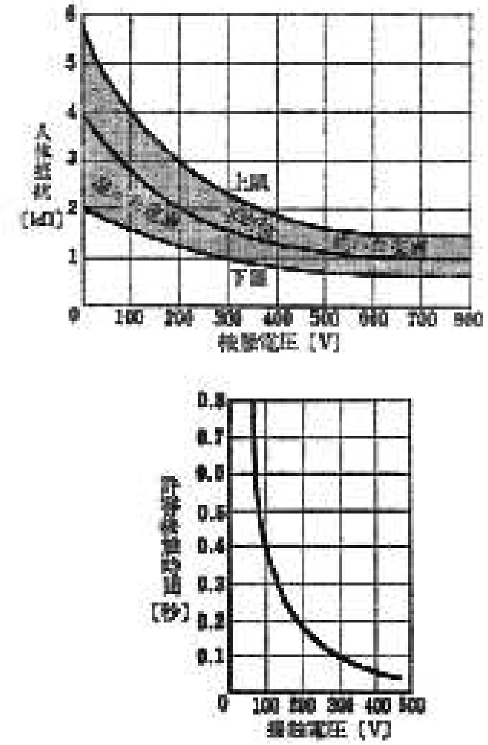


図 1.1: 人体の抵抗 (周波数 60Hz，手と手，あるいは手と足の間の抵抗) と接触電圧の関係 (上)，許容接触時間 (下)．(荒木庸夫「電磁妨害と防止対策」東京電機大学出版局 (1977)．)

は「免許があれば」クレーン，フォークリフトが使用できる．目に見えない危険としては感電，放射線がある．またレーザーは目に見えるにもかかわらず，これを目に入れる事故が多い．

ここでは，感電についてやや詳しく述べておく．感電は人体に電流が流れることで起こる．高圧線に止まっている鳥は感電しないが，これは電流が流れないからである．電流の通り道 (電路) には往路と復路が必要だが，この往復が完全に絶縁されていれば，一つの線 (路) にふれても安全である．電気設備に関する技術基準 (電技) では「電路は大地から絶縁する (非接地とする)」ことを原則としている．ただし，いちがいにこれがよいとも言えないようである．

直流よりも交流が危険で， 40-150 Hz がもっとも人体に有害とされ，50,000 Hz 以上は一応安全と考えられている．個人差はあるが，1mA が最小感知電流とされ，10-25mA（離脱電流）程度では筋肉がけいれんし，電線をはなすことができなくなる．50-80mA が数秒， 100mA が 1 秒心臓に通電されると心室細動，すなわち心臓を動かしている筋肉の正常な運動が停止するかわりにけいれんし，死に至る可能性がある．2A ではただちに心臓が停止するが，ただしただちに電流が遮断されれば，拍動を再開するといわれる．

電流値を推定するには人体の抵抗を知る必要がある．図 1.1 は接触電圧と人体の抵抗の関係を示したもので，このように皮膚が湿っているか/乾いているかも影響する．なお血液の体積抵抗率は 100Ωcm 程度である (体積抵抗率を ρ とすれば，長さ ℓ 面積 A の物体の抵抗は $R=\rho\ell/A$ である)．同じ下の図に示すように接触した時間の長さも大きく影響する．ただし 2000V を越える高電圧では人体がはねとばされるため，かえって助かることもあるという．

1.5　歴史的な実験

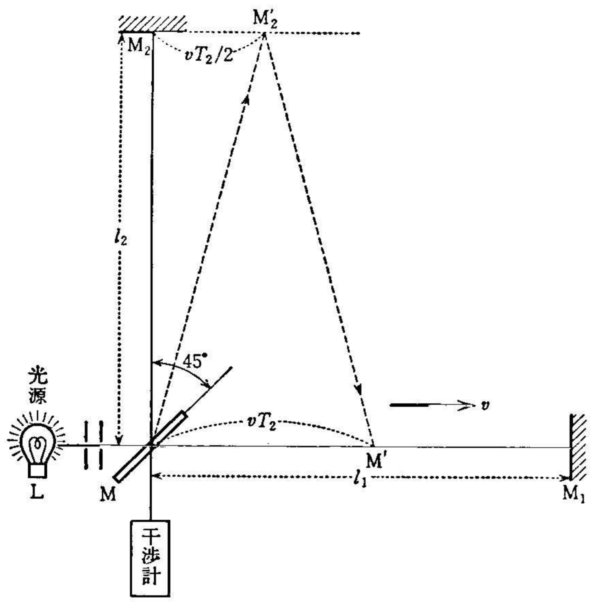


図 1.2: Michelson-Morley の実験.

ここで科学史上有名な実験について調べてみたい．それは**マイケルソン Michelson と モーレイ Morley** の 1887 年の光の速度測定の実験である．(じつは光の速度が有限であると仮定し，これを測定しようと最初に試みたのはガリレイであったようだ．歴史的に最初の実験家はガリレオ・ガリレイであるとされている．) ガリレイの相対性原理によれば，ふたつの座標系 $K(x)$ と $K'(x')$ があり，K' は K に対し x 軸の方向に速度 v で運動しているものすれば，

$$x' = x - vt, \tag{1.1}$$

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dx}{dt} - v, \tag{1.2}$$

である．ただし両座標系で時間は共通で $t' = t$ とし，$t = 0$ において両座標の原点は一致するものとする．

いっぽう 1864 年にマックスウェルが完成した電磁気学では，光は電磁波の一種であり，真空中を $c \sim 3 \times 10^8 \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ で直進する．しかし式 (1.2) によれば，光の速度はこれを観測する座標系によって異なるはずである．そこで，ある座標系 (この座標系を絶対座標系という) で光速が c であるとする．

ここで問題なのは，絶対座標系とはどこにある座標系かということである．19 世紀後半にはこれは宇宙の重心に固定された座標系 (この系をここでは G という) と考えられた．であるとすれば，地球は G に対して運動しているはずだから，地上でいろいろな方向に進む光の速度を測定すれば地球の速度が推定できるはずである．この絶対座標系とはエーテルという得体の知れないものに固定されていると考えられてきた．波 (音波，水面の波，弾性波，...) にはどれもそれを伝える媒体，すなわち振動する物質があってはじめて存在する．電磁波 (光) が波であれば，それを伝えるものが必要とされ，それがエーテルと呼ばれたのである．

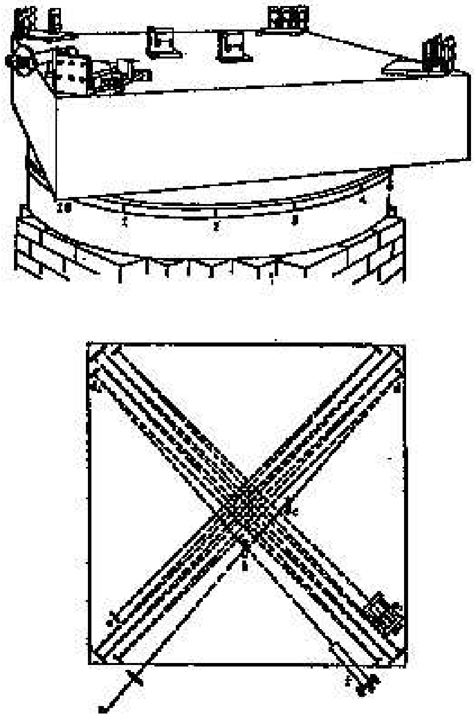


図 1.3: Michelson-Morley の実験装置とその平面図. (参考書 1 による．)

かくして行われたのが Michelson と Morley の実験であった．この実験の結果は地球の絶対速度は実質的にゼロであって，地球は G に対し静止しているというものであった.「地球が宇宙の中心」というのでは天動説の再来である．天動説に戻るのではなく，この実験事実そのものを素直にみとめたことが，アインシュタインの相対性理論の誕生に結びついたのであった．

図 1.2 は Michelson と Morley の実験装置である．光源 L の光をハーフミラー M で 2 分する．直進した光は ミラー M_1 で反射され再度 M で反射され干渉計に入る．最初にハーフミラーで反射された光はミラー M_2 で反射されたのち直進して干渉計に入る．干渉計で二つの光路長の差を測定する．

ここで測定装置そのものが M から M_1 に向かって速度 v で運動しているとする．すると二つの光路は $\mathrm{M}{\to}\mathrm{M}_1{\to}\mathrm{M}'$ および $\mathrm{M}{\to}\mathrm{M}'_2{\to}\mathrm{M}'$ にかわる．光が MM_1 を往復するために要する時間は

$$T_1 = \frac{\ell_1}{c-v} + \frac{\ell_1}{c+v} = \frac{2\ell_1/c}{1-\beta^2},$$

$(\beta = v/c)$ である．いっぽうの $\mathrm{M}{\to}\mathrm{M}'_2{\to}\mathrm{M}'$ のパスに要する時間 T_2 はピタゴラスの定理により

$$(cT_2/2)^2 = \ell_2^2 + (vT_2/2)^2,$$

であるから，これを解いて

$$T_2 = \frac{2\ell_2/c}{(1-\beta^2)^{1/2}},$$

である．ふたつの光路の差は

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{\ell_1}{1-\beta^2} - \frac{\ell_2}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right),$$

である．つぎにこの装置そのものを 90^0 回転させ，MM_2 の方向を絶対運動の方向と一致させる．この場合の光路差は

$$\Delta' = c(T_1 - T_2) = 2\left(\frac{\ell_1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{\ell_2}{1-\beta^2}\right),$$

となる．ここで $\beta << 1$ として，$1/(1-\beta^2) \sim 1+\beta^2$, $1/(1-\beta^2)^{1/2} \sim 1 + (1/2)\beta^2$ を用いると，ふたつの装置の配置によって光路差に

$$\delta = \Delta - \Delta' = -(\ell_1 + \ell_2)\beta^2, \tag{1.3}$$

の差があるはずとなる．しかしこの光路差は観測にかからなかった．

理論を確かめる，あるいは打破するためには，どのように周到な実験が必要であるか，もっと詳しく調べてみよう．彼らが実際に用いた実験装置 図 1.3 は水銀に浮かべた大きく重い石のテーブルの上に備え付け

られた．これは振動を避け，また装置を回転するときにゆがみを生じるのを避けるためであった．

実験を行うためにはあらかじめ理論的に計算される光路差の予想値があり，実験装置はこの予想値を計れるだけの精度をもったものでなければならない．予想を立てるためには地球の相対速度 v を仮定する必要がある．彼らは v として地球の公転速度，約 30km/s ($\beta = 10^{-4}$) を仮定した．実験に用いた光は Na の D 線 (589nm) であった．

100nm すなわち波長の約 1/6 の光路差を得るものとして，式 (1.3) に必要な値を代入すると，$\ell_1 + \ell_2$=10m となる． 図 1.2 における距離 MM_1,MM_2 をこの程度までは大きくしなければならない．しかし 10m の石のテーブルなどできるわけがない．図 1.3 のテーブルの一辺の長さは 1m 強であったので，精度を得るために平面図にあるように光をここを 8 往復させ，片道 11m の距離とした．この条件の下で予想される変位は干渉縞の幅の 0.4 倍となるはずであった．

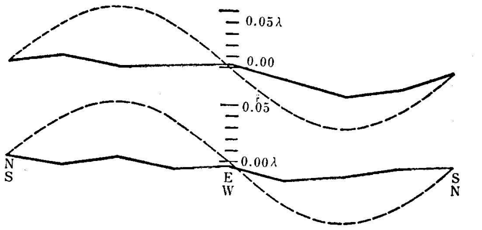


図 1.4: Michelson-Morley の実験の結果．上は正午の観測，下は夕方の観測の結果．点線は理論値の 1/8.(参考書 1 による．)

実験の結果は 図 1.4 に示すようなものであった．上は正午の観測，下は夕方の観測の結果で，点線は理論値の 1/8 を示している．彼らは実際の変位は理論値の 1/20 を越えることはないと結論している．地球の相対速度は公転速度の 1/4 以下であることが確実となる．さきほどの (そしてほとんどの教科書の) 説明では 2 点間の相違，図でいえば北東方向と南東方向，あるいは北西方向と南西方向の差だけを問題としている．しかしこの実験では南北の間をより細かく分け，この間で理論的には三角関数依存性を示すはずなのに，実験では一定であることを示した．このようにパラメーター依存性を示すと，実験結果の説得力が増大する．

Michelson は晩年には長さ 1.6km の真空ダクトによる光速の精密測定を計画し，後継者が 2.99774×10^8m/s という数値を得た (現在は光の速度は 299792458m/s と定義されている)．彼は 1907 年にノーベル賞を受賞した．

冒頭で「理論が正しい」ことを証明するのも「正しくない」ことを証明するのも価値に変わりはないといった．しかし現実には「正しくない」ことを証明する実験の方がはるかに難しい．卑近な例であるが，なにか探していて，見つかればそれで終わりである．しかし見つからなかったとしても，探し物が存在しないことを証明したことになるだろうか．これを「証明した」お手本が Michelson と Morley の実験だったのである．

問題

1. ドップラー効果を実験で証明する方法を考えなさい．
2. 虹を実験室で作る方法を考えなさい．

参考書

1. Michelson-Morley の実験は A. A. Michelson and E. W. Morley, Philosophical Magazine 24 (1987) に報告されているが，抄訳が　大野陽朗監修，高村泰雄ほか編「近代科学の源流 - 物理学篇 II」北海道大学図書刊行会 (1976)　に収録されている．
2. 松田　久「電磁気学 I」朝倉書店 (1980)．特殊相対論のために 1 章を設けている．
3. 霜田光一「歴史をかえた物理実験」丸善 (1996)．
4. 実験の専門書として，丸善，共立出版という二つの出版社から独立に実験物理学講座というシリーズが 2004 年現在刊行中である．

第2章　単位と次元

2.1　単位と次元

物理科学の研究では **単位**にはメートル系を用いるのが普通である．単位には**基本単位**と**組立単位**がある．組立単位は基本単位の乗除によりみちびくことができる．**国際単位系 (SI 系)** では

長さの単位メートル m,
質量の単位キログラム kg,
時間の単位秒 s,
電流の単位アンペア A,
温度の単位ケルビン K,
物質量の単位モル mol,
光度の単位カンデラ cd

の 7 つを**基本単位**とする．平面角の単位ラジアン rad, 立体角の単位ステラジアン sr を**補助単位**とする．

国際単位系は **MKSA 単位系**に基づいている．この名は m，kg，s，A に由来する．長さ，質量，時間に cm，g，s を基本単位とする系を **CGS 単位系**という．CGS 単位系も国際単位系もメートル系であることに代わりはない．メートル系以外の単位系に尺貫法，ヤード・ポンド系などがある．

おなじ単位であっても，あまりに大きな量，小さな量は直感的に把握しづらい．3 桁毎に区切って専用の接頭辞をつけるのがならわしである．

10^3 はキロ k,
10^6 はメガ M,
10^9 はギガ G,
10^{12} はテラ T,
10^{15} はペタ P

をつける．小さい方では

10^{-3} はミリ m,
10^{-6} はマイクロ μ,
10^{-9} はナノ n,
10^{-12} はピコ p,
10^{-15} はフェムト f

をつける．なおセンチメートルのセンチ c は 10^{-2} をあらわすものである．

基本単位ですべてをあらわすのはわずらわしい．そこで慣用的に**組立単位**が使われている．例えば，周波数の単位にはヘルツ $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$ を，圧力の単位にはパスカル $\mathrm{Pa} = \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ を電圧の単位にはボルト $\mathrm{V} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-3} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ を用いる．

次元 dimension という概念を説明したい．辺長 a の正方形の面積は a^2，辺長が a, b の長方形の面積は ab, 半径 r の円の面積は πr^2 である．辺の長さも半径も「長さ」という次元を持っていると考えると，面積には「長さ × 長さ」が現れる．長さの単位として m を採用すると，面積は m^2 となる．同様に体積は m^3 である．2 乗，3 乗となることは単位として cm を採ろうと，インチを採ろうと成り立つことである．長さ，面積，体積の次元をそれぞれ L, A, V であらわすと，$A = L^2, V = L^3$ となる．これを,「面積は長さの 2 乗の次元を持つ」,「体積は長さの 3 乗の次元を持つ」, あるいは逆に「長さは面積の 1/2 乗の次元を持つ」などと表現する．ある物理量の次元が他の物理量の次元で表現できることは，これらの間に関係があることを示している．

ニュートンの運動方程式は

$$F = m\frac{d^2 s}{dt^2},$$

である．ここには力・質量・長さ・時間という 4 つの物理量が登場している．この式はこれら 4 つの物理量の次元が独立ではないことを示している．力・質量・長さ・時間の次元を F,M,L,T とすれば，この式の教えるところは $\mathrm{F} = \mathrm{MLT}^{-2}$ である．物理量の微分は次元の計算では割り算，積分は掛け算になる．ところが．力・質量・長さ・時間のなかから任意の 3 つを選ぶと，そのうちのひとつの次元を他のふたつの次元を用いてあらわすことはできない．このとき，これら 3 つの物理量は独立次元を持つという．

国際単位系では質量・長さ・時間の単位を基本単位と決めたが，これはそう約束したにすぎない．かりに力の単位ニュートン N を基本単位とすれば，質量・長さ・時間のうちのひとつを組立単位にすればよい．かりに，われわれがニュートンの運動方程式を知らなかったとすれば力・質量・長さ・時間は互いに独立に見え，これら 4 つの単位は基本単位となる．

ニュートンの運動方程式が示すように，物理公式は組立単位を作る．エネルギー (仕事) の次元は $\mathrm{ML}^2\mathrm{T}^{-2}$ である．したがってエネルギーの単位を基本単位とされているもので組み立てれば $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ である．この単位はジュール J と呼ばれている．もうひとつ例をあげよう．電流 I は単位時間当たりの電荷 Q の流れであるから，$I = dQ/dt$ である．これから電荷の次元は IT，その単位はクーロン $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$ と決まる．

電荷 Q を電位が V だけ高いところに移すには仕事 QV が必要である．これから電位の単位ボルト V が $\mathrm{J/C} = \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{A}^{-1}$ と定義される．

同じ次元の物理量の比は次元を持たない．あるいは,「同じ次元の物理量の比の次元は 1 である」といった方がいいかもしれない．このような物理量を無次元量あるいは**無次元数**という．この物理量はどのような単位系でも同じになる．無次元量は流体力学で好んで使われる．またある物理量の計算結果や実験結果を示すときに代表的な量で割って無次元数として示すことがある．このような操作を正規化という．相対論では速度 v を真空中の光速 c で正規化した**ベータ値** $\beta = v/c$ を用いる．流体力学では音速 C_s で正規化した速度 $M = v/C_s$ をマッハ数という．これらは簡単な無次元数の例である．

ラジアンとステラジアンについて補足しておく．ラジアンは「円の周上でその半径の長さに等しい弧を切り取る２本の半径の間に含まれる平面角の大きさ」, ステラジアンは「球の中心を頂点とし、その球の半径を１辺とする正方形に等しい面積を球の表面上で切り取る立体角」というのが公的な定義である．何のことか分からないが，単位長さの半径の円の周長が 2π，球の表面積が 4π となることがこれらの定義の基本である．平面角の場合は，角度に対応する円弧を思い描こう．弧の長さは角度に比例する．弧の長さの半径に対する比がラジアンである．ステラジアンの場合は，立体角を「見込んで」いる点を中心とし,「見込まれている」面積を底辺とする円錐を思い描く．つぎにこの円錐の稜を半径とする球を思い描く．今度は立体角は円錐の底面積に比例する．円錐の底面積の球の半径の 2 乗に対する比がステラジアンである．このように考えるとラジアン長さ L の比，ステラジアンは面積 L^2 の比で定義される無次元数ということになる．ことさら単位に名前をつける必然性には疑問があるが，名前があって便利なことがあるのも確かである．

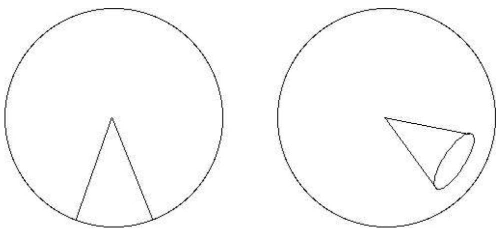


図 2.1: ラジアンとステラジアン．

ラジアンから発生する単位に角周波数 anguler frequency がある．いわゆる振動数は f, ν を用いて表す．角周波数は $\omega = 2\pi f$ となり，単位は厳密には $\mathrm{rad{\cdot}s}^{-1}$ だが，s^{-1} としてしまうことが多い．光子のエネルギーは $E = h\nu$ だが，角周波数を使うと $E = h\omega/2\pi$ である．そこでプランクの定数 h のかわりに $\hbar = h/2\pi$ を使って，$E = \hbar\omega$ と書かれることになる．角周波数は単位時間に何回振動するかをあらわしているが，単位長さに何回振動するかをあらわすのが波数 wave number である．波長を λ とすれば $k = 2\pi/\lambda$ であって，厳密にはここにもラジアンが登場する．

2.2 次元解析

ある物理量 x の次元 X が基本次元 $A, B, C, ...$ により $X = A^{\alpha_x} B^{\beta_x} C^{\gamma_x} ...$ とあらわせ，また別な物理量 y の次元 Y が基本次元 $A, B, C, ...$ により $X = A^{\alpha_y} B^{\beta_y} C^{\gamma_y} ...$ とあらわせるものとしよう．このとき $x = y$ であれば $X = Y$ であって，$\alpha_x = \alpha_y, \beta_x = \beta_y, \gamma_x = \gamma_y, ...$ などが成り立たなければならない．この，あたりまえな事実を応用するのが**次元解析**である．あたりまえといってばかにしてはいけない．計算のチェック，あるいは計算せずに見当をつけるためなどにはとても役に立つ．

ここではバネに質量 m の重りをつけたときに見られる単振動の周期 T を次元解析で求めてみる．バネを特徴づける定数はバネ定数 k であって，力を伸びで割ったもの、その次元は F/L である．T には k と m が関係するものとして，a を無次元の定数として

$$T = ak^x m^y,$$

とおき，x と y を決める．右辺の次元は $F^x L^{-x} M^y$ であるが，$F = MLT^{-2}$ であったから

$$M^x L^x T^{-2x} L^{-x} M^y = M^{x+y} T^{-2x},$$

と変形できる．これが周期の次元 T と等しいために $x + y = 0, -2x = 1$ すなわち $x = -1/2, y = 1/2$ でなければならない．はじめに仮定した式に代入すると

$$T = a(m/k)^{1/2},$$

である．a の値を決めることはできない．

ちゃんと解くには，運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

から出発する．この解は A, B を定数として，$\omega = (k/m)^{1/2}$ を用いると

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t,$$

であり，周期は $T = 2\pi/\omega = 2\pi(m/k)^{1/2}$ である．さきほど決まらなかった定数は 2π である．

2.3　モデル実験

次元解析や無次元数をうまく使っているのは流体力学である．飛行機や船舶の性能を実験するのに，いちいち実物を作って実験するのではお金も時間もかかってしまう．そこで行われるのが，**モデル実験**である．流体力学の応用はこのような移動体のみにとどまらず，原子炉の冷却水の解析とか，核融合のためのプラズマ研究にもおよんでいる．

流体の性質をあらわす無次元数として，ここでは**レイノルズ Reynolds 数** Re と**マッハ Mach 数** Ma を紹介する．これらは

$$\begin{aligned} Re &= \frac{vL}{\mu/\rho}, \\ Ma &= \frac{v}{C_s}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

にによって定義される．v は「代表速さ」L は「代表長さ」μ は流体の粘性率，ρ は流体の密度 ($\nu = \mu/\rho$ を動粘性係数という)，C_c は流体中の音速である．速さや長さに「代表」という形容詞をつけるのが流体力学的なところであって，何をもって「代表的」とするかは，着目している現象によって異なる．

レイノルズ数 Re が 3000 より小さいときは流れは層流，大きいときは乱流であるとされる．またマッハ数 Ma が１以上の流れを「超音速流れ」，１以下の流れを「亜音速流れ」という．さらに Ma が約 0.3 以下の流れでは，流体の密度 ρ の変化を近似的に無視できる場合が多い．そこで Ma =0.3 以下の流れを「非圧縮流れ」，0.3 以上の流れを「圧縮流れ」という．

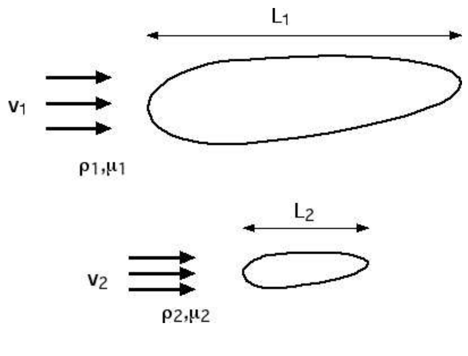


図 2.2: モデル実験.

ここで飛行機の翼周りの流れを実物 (大) と模型 (小) で比較する場合を想定しよう．ふたつの現象を記述する方程式は同じであって，方程式に入れる定数だけが異なるはずである．このとき $Ma < 0.3$ であれば，この方程式は非圧縮流れのナビエ・ストークス Navier-Stokes の式と呼ばれ，この式を無次元化すると

$$\frac{\partial V}{\partial T} + V\frac{\partial V}{\partial X} = F - \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 V}{\partial X^2}, \tag{2.2}$$

となる．ここで V, T, X, F, P は無次元化した速さ，時間，距離，力．圧力である．例えば速さを無次元化するには，ある基準の速さ v_0 を用い，実際の時間 t を $t = Tt_0$ とおく．どのような基準速さ，基準時間，基準距離等を用いても，この方程式が得られる．ここではレイノルズ数 Re だけがパラメータである．レイノルズ数がふたつで同じになるように相似実験の条件を設定すれば，個々のパラメータを等しくする必要はない．すなわち，$Re_1 = Re_2$ でさえあれば，$L_1 = L_2$，$v_1 = v_2$，$\mu_1 = \mu_2$，$\rho_1 = \rho_2$ とする必要はない．L を小さくしたら，すなわち小さな模型で実験するときは，v を大きく，すなわちより高速の流れを使えばよい．それが不可能であっても，動粘性係数 $nu = \mu/\rho$ が小さい物質を使うという自由度がある．

非圧縮流れにおいてはレイノルズ数が唯一のパラメータだが，マッハ数が 0.3 以上の圧縮流では，レイノルズ数とマッハ数の二つがパラメータとなる．圧縮流れでは，二つのパラメータを一致させないと，厳密な意味での力学的相似は得られない．このような状況を設定するのが困難な場合は，マッハ数の一致を優先させる．これはレイノルズ数が高い領域では，多少のレイノルズ数の変化は流れに影響をあまり与えないためである．

2.4　電磁気学の単位系

力学の基本単位は長さの m，時間の s，質量の kg であったが，電磁現象を説明するためにはもう一つ基本単位があったほうがいい (じつは後で述べるように，なくてもいい)．このため国際的に電流の次元を基本とすることに合意されており，その単位をアンペア A とすることになっている．これを用いていくつかの組立単位が定義される．

電荷 (クーロン) は電流の時間積分で，$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$，電圧は，単位電荷 C を単位電圧 V 引き上げるための仕事 J が $\mathrm{J} = \mathrm{C} \cdot \mathrm{V}$ だから，$\mathrm{V} = \mathrm{J/C}$. オームの法則により，抵抗 (オーム) $\Omega = \mathrm{V/A}$. 電気容量ファラドは，電位差 V の極版間に蓄える電荷 C=F·V より $\mathrm{F} = \mathrm{C/V}$ である．電流 I の時間変化に比例して起電力 $V = L(dI/dt)$

が生じる．この比例定数インダクタンスであってヘンリー H を単位とする．すなわち $\mathrm{H} = \mathrm{Vs/A} = \Omega\mathrm{s}$ である．電場は単位長さあたりの電位差であるから V/m である．変形すると N/C となるが，これは電荷が電場中におかれたときに受ける力をあらわしていると解釈できる．電場の単位には固有の名前がない．磁束密度 B に垂直に速度 v で動く電荷 q に働く力を F とすれば $F = qvB$ である．したがって磁束密度の単位テスラ T は $\mathrm{T} = \mathrm{NC^{-1}m^{-1}s}$．なお磁束は磁束密度に面積をかけたもの (逆にいえば単位面積あたりの磁束が磁束密度) であって単位をウェーバー Wb とする．すなわち $\mathrm{Wb} = \mathrm{Tm^2} = \mathrm{Vs}$.

アンペアを基本単位に加えなくてもいいといったが，長さ・質量・時間だけを基本単位とする系を 3 元単位系，アンペアを加えた系を **4 元単位系**という．歴史的な経緯により，**3 元単位系**では長さ・質量・時間に cm,g,s を採用している．このため 3 元単位系は cgs 単位系と一致する．4 元単位系は MKSA 単位系である．

電磁気学の単位は電磁現象がもたらす力学的な効果を用いて定義せざるを得ない．このような力には静電力

$$F = a_1 \frac{qq'}{r^2}, \tag{2.3}$$

静磁力

$$F = a_2 \frac{q_m q'_m}{r^2}, \tag{2.4}$$

磁場と運動する荷電粒子によるローレンツ力

$$F = a_3 qv \times B, \tag{2.5}$$

がある．最後のローレンツ力は電磁力の代表としてあげた．a_1, a_2, a_3 は比例定数であって，これらのどれを 1 とするかで，単位系が異なるものになる．

$a_3 = 1$ とするのが MKSA 4 元単位系で，このとき $a_1 = 1/(4\pi\epsilon_0), a_2 = 1/(4\pi\mu_0)$ となる．$\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ の関係がある．

cgs 3 元単位系ではこのうちふたつを 1 とする．$a_1 = a_2 = 1$ とするのが cgs ガウス単位系であって，このとき $a_3 = 1/c$ である (厳密には H, B のどちらに基づいてローレンツ力を定義するかで式が異なるが，どちらにせよ $1/c$ があらわれる)． $a_1 = a_3 = 1$ とするのが cgs 静電単位系であって，このとき $a_2 = c^2$ である．最後に $a_2 = a_3 = 1$ とするのが cgs 電磁単位系であって，このとき $a_1 = c^2$ である．

$a_1 = a_2 = a_3 = 1$ としてしまうと，自由度が減って 2 元単位系となる．長さ s と時間 t は速度 v を仲介として

$$s = vt, \tag{2.6}$$

と書ける．v は光速 c を単位としてはかり， $c = 1$ とおくと，長さと時間とは独立でなくなり，長さは光の進む時間で計ることになる．なお物理では $v/c = \beta$ と書く．これは天文学で「光年」を長さの単位としていることを思えば，あるいは「駅まで何 km」ではなく「駅まで何分」という言い方をすることを思えば，そう突飛なことではない．この単位系は一部の理論家が好んで用いている．

話題を変えよう．マックスウェルの方程式といえば，電磁気学の，というより物理学の金科玉条である.「マックスウェルの方程式を書け」というようなストレートな問題が，学部の試験のみならず，大学院の入試や公務員試験にも登場する．教科書のマックスウェルの方程式は次のような顔をしている．

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}\mathbf{H} &= \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}}, \\
\mathrm{rot}\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{t}}, \\
\mathrm{div}\mathbf{D} &= \rho, \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ところが，てもとにある M. Born and E. Wolf "Principle of Optics 6th edition", Pergamon Press (1980) の第 1 ページにはマックスウェルの方程式が次のように紹介されている．

$$\begin{aligned}
\mathrm{curl}\mathbf{H} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{D}} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \\
\mathrm{curl}\mathbf{E} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{c}}\dot{\mathbf{B}} &= 0, \\
\mathrm{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho, \\
\mathrm{div}\mathbf{B} &= 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

cgs ガウス単位系である．この本は決して古い本でも，変わった本でもない．むしろ光学の研究者は誰もが持っている本だといえる．分野によってはこのような表記が好んで行われている．いまのところ表記が MKSA4 元系に統一されることはありそうもない．このことは今後学習をすすめるうえで覚悟しておく必要がある．

2.5 自然単位系，原子単位系など

さきに 2 原単位系では $c = 1$ とした．さらにこの流儀を押し進めて，プランクの定数 $\hbar$=1，電子の質量を m_e=1 とすれば，すべての量に次元がないことになる．このような単位系を**自然単位** natural unit 系がある．

すこし説明すると，光子のエネルギーは

$$E = \hbar\omega, \tag{2.9}$$

であることを使えば，エネルギーは角周波数に比例する．比例定数 $\hbar = 1$ としてしまえば，エネルギーは時間の逆数になる．また，アインシュタインの相対性原理によれば

$$E = mc^2, \tag{2.10}$$

である．$c = 1$ なら $E = m$ となる．次元を未知数として連立方程式を作ると，式 (2.6) で $v = c = 1$ としたので

$$L = T,$$

また $\hbar = 1$ としたことは，次元解析では

$$ML^2T^{-1} = 1,$$

と等価である．また質量とエネルギーが等価なので，

$$ML^2T^{-2} = 1,$$

である．これらの 3 つの式を連立させると $M = L = T = 1$ となる．このような約束のもとでは，単位を使わなくても物理現象を記述できる．

また原子物理学，固体物理学に用いられる単位系に**原子単位系**がある．ボーア半径や，水素原子の凝集エネルギー 13.5eV を基準に採用するが，これにもハートリー原子単位系とリードベルク原子単位系の 2 種類があるというややこしさである．

要するに単位とか次元とかは，科学者の申し合わせのようなもので，かなりいい加減なものである．SI 単位は非のうちどころがない体系のように見える．しかしここでふれなかった SI 公認の単位には，照明に関するルーメン lm・ルクス lx，放射線に関するベクレル Bq・グレイ Gy・シーベルト Sv がある．ちなみに基本単位であらわすと，Bq=s^{-1}=Hz，Gy=Sv=J·kg^{-1} であって，分野外から見ると何のためにあるのか分からない．単位については議論すればするほど問題点がみつかるのも事実である．SI 単位も異なる分野間で折り合いをつけて決めた政治的な結果である．しかし単位をないがしろにすると，科学者・技術者として生きていくことができない．単位は法律のようなものと思えばいい．

問題

1. 抵抗 R の単位を Ω，インダクタンス L の単位を H，電気容量 C の単位を F とする．このとき RC，L/R の単位が s となることを示せ．

2. プラズマ中の電子の分布に摂動が加わると，電子同士の反発が原因となってプラズマ振動が生じる．ばねによる振動のアナロジーからプラズマ振動数

$$\omega \sim \left[\frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m}\right]^{1/2}, \tag{2.11}$$

を導け．ただし m は電子の質量，n_0 は電子密度である．

力学によれば，ばね定数を k，ばねに付随する物体の質量を m とすれば，振動数は $\omega = [k/m]^{1/2}$ である．ばね定数は，ばねに加わる力を F，ばねの変形長を L とすれば，$k = F/L$ である．プラズマでは力はクーロン力である．r を電子間の平均的な距離として，$F = e^2/(4\pi\epsilon_0 r^2) \sim e^2/(\epsilon_0 r^2)$ とおく．またばねの変形 L も r の程度であるとする．すると $k \sim e^2/(\epsilon_0 r^3)$ を得る．$1/r^3 = n_0$ を電子密度として，$k \sim n_0 e^2/\epsilon_0$, として，これを変形すれば上の式が得られる．

参考書

1. 高田誠二「単位と単位系」共立出版 (1980).

2. 無次元数，ナビア・ストークスの方程式については，日本機会学会編「機械工学便覧　A5 流体力学」丸善 (1986).

3. 霜田光一ほか「大学演習電磁気学」裳華房 (1980); MKSA 単位系と cgs 単位系を併記.

第3章　実験誤差

3.1　平均・分散

実験結果を公表するときは，結果を定量的に示さなければならない．この定量化・数値化された実験結果を**データ**という．

データは**誤差**を伴う．データは真の値と誤差の和であるといってもよい．誤差には**系統誤差**と**偶然誤差**がある．計測においてつねに真の値より決まった値だけ大きい，あるいは小さい値が出るとすれば，(測定値に**かたより**を生じるとすれば)，それは系統誤差によるものである．たとえば 0.99kg を 1kg と表示する天秤で重さを測ってデータとしたとすれば，結果は偏ったものとなる．偶然誤差のほうは測定値に**ばらつき**を与える．やはり天秤を使ったとしても，たまたま風が吹いたとか，あるいは計るひとの勘違いとか，予想し得ない事態が偶然誤差を招く．

通信工学では**信号** signal と**雑音** noise ということばを使う．信号が真の値，雑音が誤差に対応する．信号と雑音の量的な比を**信号雑音比** あるいは**エスエヌ比** (SN 比) という．精度は誤差のうらがえしである．精度か良いことは誤差が小さいことである．

偶然誤差は正負どちらの方向にどれだけの大きさで出るか予想がつかないが，これを確率的に扱うことはできる．測定を多数回繰り返しても同じ結果が出るとは限らない．われわれが知りたいのは**真の値**であるが，この真の値の代用として**平均**を用いる．n を測定回数，k 回目の測定値を x_k とすれば，平均は

$$\mu(x) = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}, \tag{3.1}$$

である．

この式は一般化して x_k を得る確率を p_k として

$$\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k, \tag{3.2}$$

と書く．ただし

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1, \tag{3.3}$$

である．式 (3.1) は $p_k = 1/n$ という特殊な場合に成り立つと考えることができる．

偶然誤差あるいはばらつきの目安となるのは**分散**であって，平均値と各々の測定値との差の二乗の平均値，すなわち

$$V(x) = \frac{(\mu(x) - x_1)^2 + (\mu(x) - x_2)^2 + ...(\mu(x) - x_n)^2}{n}, \tag{3.4}$$

式 (3.2) のように一般化すれば

$$V(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k (\mu(x) - x_k)^2, \tag{3.5}$$

である．分散の平方根 $\sigma = V^{1/2}$ を**標準偏差**という．すなわち

$$V(x) = \sigma(x)^2, \tag{3.6}$$

である．

測定という立場をはなれて，平均・分散の概念を拡張しよう．例えば，気体の分子のある方向への速度が持つ分布を考えるときには，速度は連続的に分布しているとするのが妥当である．母集団 (この場合は対象とする全部の気体分子) の物理量 (この例では気体分子の速度) が x である割合を $f(x)$ とすれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1, \tag{3.7}$$

でなければならない．このとき平均を

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx, \tag{3.8}$$

分散を

$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx, \tag{3.9}$$

で定義する．式 (3.2) と (3.6) を比べてみよう．**離散分布**における平均の定義式 (3.2) をすなおに**連続分布**に拡張すると式 (3.6) となることがわかる．

力学では 3 次元物体のたとえば x 軸に関する慣性モーメントを

$$I_x = \int \rho(y^2 + z^2)dV,$$

と定義する．ρ は密度，dV は体積要素である．この式と式 (3.9) が類似していることに注目していただきたい．分散は一種のモーメントと解釈できる．

3.2　誤差分布 (正規分布)

偶然誤差は多数の原因から生じた微小な誤差が累積したものと考えられる．いま，仮に n の原因があり、どの原因から生じる誤差も $+\epsilon/2$ あるいは $-\epsilon/2$ のど

ちらかの値を採るものとし，正負の誤差を生じる確率はそれぞれ 1/2 であるとする．もっとも簡単なのは n=2 のときであるが，正負の誤差の起きる場合を + - の組み合わせで示すと， --, -+, +-, ++ の 4 つの場合がある．従って誤差が $\epsilon, 0, \epsilon$ となる確率は 1:2:1 である．あるいは可能な組み合わせの数 2^2 (一般には 2^n) で正規化すると 0.25:0.5:0.25 となる．

1 回の試行で起こりうる事象の数が 2 つで，一方が起こる確率が p (もう一方が起こる確率は $1-p$) であって，試行回数を n とするとき，特定の事象が i 回生じる確率は

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, \tag{3.10}$$

である．この分布を **2 項分布**という．先の例は $n = 2, p = 0.5$ の場合であった．おなじく $p = 0.5$ で，$n = 3, 6, 12, 24$ の場合を 図 3.1 に示す．なお 2 項分布の平均は

$$np,$$

分散は

$$np(1-p),$$

である．

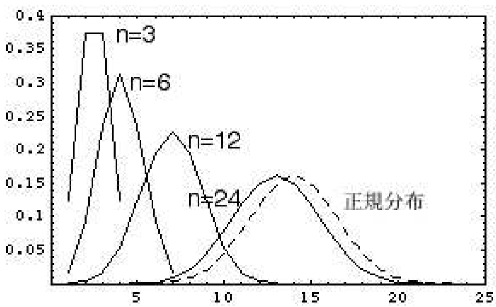


図 3.1: n=3,6,12,24;p=0.5 の 2 項分布および正規分布.

2 項分布で n を大きくしていくと，分布のかたちは**正規分布 (ガウスの誤差分布)** に近づく．図 3.1 には $n = 24, p = 0.5$ の 2 項分布と同じピーク，同じ分散を持つ正規分布も描いてある．$n = 24$ の 2 項分布はかなりこの正規分布に近いことがわかる．実は重ねて描くと区別が付かないので，正規分布の平均はあえてずらして書いてある．

正規分布の式は

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \tag{3.11}$$

である．数学の本に出ているガウスの誤差関数は

$$f(x) = \exp[-x^2],$$

である．なぜこの式 (3.11) にはふたつものパラメーター μ と σ があるのか，その答えは式 (3.6)-(3.8) に従って正規分布の平均と分散を計算すれば分かる．μ は平均そのもの，σ は標準偏差そのものである．

偶然誤差の分布は必ず正規分布になるわけではない．しかし正規分布の性質はよく知られており，これがあてはまるとすると便利なことが多い．そこで正規分布は誤差解析のみならず，物理科学ではあちこちに登場する．たとえば気体分子の速度分布がマックスウェル分布に従うことが知られている．1 次元では

$$f(v) = \frac{1}{(2\pi kT/m)^{1/2}} \exp\left[-\frac{mv^2}{2kT}\right], \tag{3.12}$$

である．これは平均 0，分散 kT/m の正規分布にほかならない．温度とは速度の分散によって定義されている．

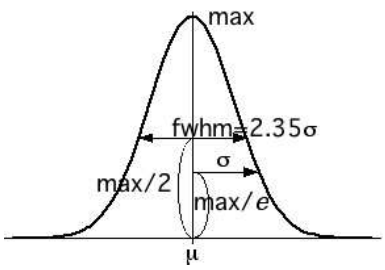


図 3.2: 正規分布.

正規分布 $f(x)$ のグラフから平均と標準偏差を読みとるにはどうすればよいか．$x = \mu$ において $f(x)$ は最大となる．また式 (3.11) より $f(\mu \pm \sigma)/f(\mu) = 1/e$ である．すなわち図 3.2 のように，$f(x)$ を最大値の $1/e = 0.367...$ とする x の値から σ がわかる．このような孤立波形の幅をあらわす方法として，**半値幅 (半値全幅)** full-width-half-maximum もしばしば用いられる．これは分布 $f(x)$ の最大値の 1/2 を与える x の値の差である．正規分布の場合は半値全幅 fwhm と σ には fwhm=$2 \times (2\log 2)^{1/2}\sigma \sim 2.35\sigma$ の関係が成り立つ．半値幅は正規分布に限らず単一のピークを持つ分布に定義できる．いっぽう標準偏差はどのような分布にも定義できる．

3.3 誤差の伝播

ここではまず正規分布の**再生性**といわれる性質を述べ，つぎにこの性質の応用である誤差の伝播を述べる．いまふたつの誤差要因があるとする．このときひとつの要因がつくる分布 $f_1(x)$ の変数は，すでに他の要因

による誤差をふくんでいる．第 2 の要因による分布を $f_2(x)$ とすれば，ふたつの要因による分布は

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) f_2(x-z) dz, \tag{3.13}$$

である．この右辺の操作は**たたみ込み積分** (convolution) とよばれ，理工学のいろいろな分野に登場する．この説明はいささか直感的だが，これで納得できない方は統計学の教科書を参照していただきたい．

正規分布の再生性とは,「確率変数 x_1, x_2 が独立でそれぞれ平均 μ_1, μ_2，標準偏差 σ_1, σ_2 の正規分布をなすとき，変数 $c_1x_1 + c_2x_2$ ($c_1.c_2$ 　は定数) は平均 $c_1\mu_1 + c_2\mu_2$，標準偏差 $(c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2)^{1/2}$ の正規分布をなす」という性質である．$c_1 = c_2 = 1$ の場合について説明する．

式 (3.13) の $f_1(x), f_2(x)$ とも平均 0，分散 σ_1, σ_2 の正規分布をなすとすれば，被積分関数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_1} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_1^2}\right) \\ \times \quad & \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-z)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\ = \quad & \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-z)^2}{\sigma_2^2}\right)\right], \end{aligned}$$

である．

$$\begin{aligned} & \frac{z^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-z)^2}{\sigma_2^2} \\ = \quad & \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}x\right)^2 + \frac{x^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}, \end{aligned}$$

と変形できるので，

$$\left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)^{1/2}\left(z - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}x\right) = u,$$

と変数変換し，公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2/2) du = (2\pi)^{1/2},$$

を使うと，最終的に

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right], \tag{3.14}$$

を得る．これは標準偏差 $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^{1/2}$ の正規分布にほかならない．

この再生性はより多くの確率変数が関わる場合にも,「確率変数 $x_1, x_2, ...$ が独立でそれぞれ平均 $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$，標準偏差 $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ の正規分布をなすとき，変数 $c_1x_1 + c_2x_2 + ...$ ($c_1, c_2, ...$ 　は定数) は平均 $c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + ...$，標準偏差 $(c_1^2\sigma_1^2 + c_2^2\sigma_2^2 + ... + c_n^2\sigma_n^2)^{1/2}$ の正規分布をなす」と拡張することができる．

これをより一般的に，しかも測定誤差の推定に役立つかたちにいいかえよう．

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_n), \tag{3.15}$$

の関係を用い，$x_1, x_2, ..., x_n$ を測定して y を求めたい．このとき $x_1, x_2, ..., x_n$ の測定値の標準偏差が $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ であれば，算出した y の標準偏差は

$$\sigma_y = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_2^2 + ... \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_n^2\right]^{1/2}, \tag{3.16}$$

で与えられる．これを**誤差の伝播法則**という．正規分布の再生性は式 (3.15) が線形結合の場合であった．

3.4 積算による平均化

何回も同じ測定を繰り返して平均をとると誤差は減少する．誤差が正規分布に従うものとして，　このことを数学を使って考えてみよう．1 回の測定量を $x_1, x_2, ..., x_n$ として

$$y = x_1 + x_2 + ... + x_n, \tag{3.17}$$

とする．$y = f(x)$ として誤差伝搬法則を使うと，

$$\sigma_y = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2)^{1/2} \tag{3.18}$$

であるが，$\sigma_1 = \sigma_2 = ... = \sigma_n = \sigma_0$ であれば (そうではないという理由はない),

$$\sigma_y = n^{1/2}\sigma_0,$$

である．いっぽう $x_1, x_2, ..., x_n$ の平均を x_0 とすれば，y の平均は

$$nx_0,$$

である．

信号雑音比 (SN 比，signal-to-noise ratio) は

$$\frac{\sigma_y}{y} = \frac{n^{1/2}}{n}\frac{\sigma_0}{x_0} = \frac{1}{n^{1/2}}\frac{\sigma_0}{x_0},$$

となる．n 回の測定で信号の大きさは n 倍になるが，雑音は $n^{1/2}$ 倍にしかならない．n を増やせば SN 比は改善する．このことは記憶する価値がある．

一定時間におこる放射性同位元素の崩壊数 (放射線の計数) などは**ポアソン分布**

$$p(m) = \frac{e^{-n}n^m}{m!} \tag{3.19}$$

に従う．この分布は，定められた時間間隔の間に平均 n 個の事象が起こったときこの時間内に m 個の事象が起こる確率を与える．この分布では m の平均は n,

$$\sum_{m=0}^{\infty} mp(m) = n,$$

m の分散も n，すなわち標準偏差は $n^{1/2}$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m-n)^2 p(m) = n,$$

である．証明は省略する．

詳しいことは省略するが，ポアソン分布は 2 項分布において変数を整数のまま極限をとった結果である．いっぽう 2 項分布において，変数が連続な値をとれるものとすると正規分布になる．従ってボアソン分布の変数 n が 10 より大きいときは，正規分布の式 (3.11) で $\sigma = n^{1/2}, \mu = n$ と置いたもので近似できる．

ポアソン分布に従って考えると，放射線の計数を単位時間行って，1 という結果を得たとすれば，この結果は 0 かもしれないし，2 かもしれない，計数結果が 100 であれば，90 から 110 の間ということになり，10000 であれば 9900 と 10100 の間ということになる．

3.5 実験計画法

せまい意味での**実験計画法**は推測統計学の一分野である．物理学では実験計画法はあまり重要視されていない．たしかに，その名前から想像するほど役に立つものではないが，その考え方にはなるほどとおもわせるものがあるので手みじかに紹介する．

考えの根本にあるのは，実験誤差を小さくすることであって，そのために，フイッシャーの 3 原則

1. 反復
2. 無作為化
3. 局所管理

がある．もっとも基本的なのは反復の原則で，実験は一度やっただけではダメ，何回もやって見ろ，数値で答えが出るなら平均値をとれということである．

多くの実験ではひとつのパラメータの数値を変えてデータを取る．たとえば，化学の実験で，3 点の溶液温度 (例えば $20^0C, 50^0C, 80^0C$) について反応速度を測るという例を考えよう．このとき実験計画法のことばでは温度のことを因子といい，具体的な $20^0C, 50^0C, 80^0C$ という数値を水準という．この水準をここでは A,B,C であらわすことにする．$20^0C, 50^0C, 80^0C$ をそれぞれ A,B,C というものと了解していただきたい．一日 3 回データを取るものとし，またひとつの水準について 3 回ずつデータを取って平均することにしよう．このとき，1 日目 AAA と同じ条件で 3 回データを取り, 同様に 2 日目は BBB, 3 日目は CCC とやって 3 日で実験を終えるのは良い方法ではない．特定の日に特有の条件，例えば体調・天候などが予期せぬ因子として入り込むからである．できることならどの日も 3 つの水準で実験を行い、その中で比較すべきである．これを局所管理の原則という．

では 1 日目 ABC, 2 日目 ABC, 3 日目 ABC という順序はどうであろうか．同じようなことをやってると次第になれてうまくなり，その結果 A より B，B より C がいい結果が出るかもしれない．また A が朝，B が昼，C が夕方では温度の影響が出るかもしれない．1 日目 ABC, 2 日目 BAC, 3 日目 CAB という順序では日による順序，同じ日の中の順序が無作為化される．これは無作為化の原則に従ったものである．

実験計画法では直交表なるものを使う．その例として「秤量計画」なるものを紹介しよう．ふたつのものの質量 A と B を知るために 1 回づつ秤 (はかり) にかけるとする．議論を簡単にするために測定結果の分散は どちらの場合も σ^2 であるとする．このとき A, B の推定値はそれぞれ分散

$$Var(\hat{A}) = Var(\hat{B}) = \sigma^2,$$

を持っている．言い方を変えると

$$\hat{A} = A \pm \sigma, \hat{B} = B \pm \sigma$$

である．

はかりかたを変え、1 回目はふたつの質量の和

$$Y_1 = A + B,$$

2 回目は差

$$Y_2 = A - B,$$

を計るとしよう．ふたたび測定結果の分散は どちらの場合も σ^2 すなわち $\Delta Y_1 = \Delta Y_2 = \sigma$ であるとす

る．A, B の推定値はそれぞれ

$$\hat{A} = \frac{Y_1 + Y_2}{2} = A \pm \sigma_{add},$$

$$\hat{B} = \frac{Y_1 - Y_2}{2} = B \pm \sigma_{sub},$$

から求める．$\hat{A}$ に含まれる誤差 σ_{add} は，誤差伝播の法則により

$$\begin{aligned}
\sigma_{add}^2 &= \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial Y_1}\right)^2 \Delta Y_1^2 + \left(\frac{\partial \hat{A}}{\partial Y_2}\right)^2 \Delta Y_2^2 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{2},
\end{aligned}$$

である．同様に

$$\sigma_{sub}^2 = \sigma^2/2,$$

が求められる．誤差でいえば $\sigma/\sqrt{2}$ を得る．すなわち和と差から求める方法では，このときは質量 A のもの，B のものをそれぞれ 2 回ずつ計って平均したときと同じ精度が得られる．

さきに「直交表」といったが，その最も簡単なものは

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

である．第 1 行は和を求める操作，第 2 行は差を求める操作をあらわす．

問題

1. なにかの長さを測定して，10 回の測定で 10.03mm，5 回の測定で 10.20mm，3 回の測定で 9.83mm という値を得た．平均を求めよ．

2. 電離真空計は電流 I_e の電子ビームで残留ガスをイオン化し，その結果流れるイオン電流 I_i を測定し

$$p = \frac{I_i}{SI_e},$$

から圧力 p を求める．S は比例定数であるが，条件により 10% 推定値からずれる．I_e, I_i の値にも 5% の誤差がある． S =20torr^{-1}，I_e =5mA，I_i =1μA のときの圧力とその誤差を求めよ．

3. 10^{-1} の桁を四捨五入して 1 の桁まで表示する，正負の値を計る計測器がある．表示が 0 であったとすれば，これは真の値が，-0.5 と 0.5 の間に一様に分布していることを示している．このときの平均 (この計測器で無限回測定したときの平均という意味) と標準偏差を求めよ (シェパードの定理).

参考書

1. 真島正市，磯部孝「計測法通論」東京大学出版会 (1974).

2. R. S. バーリントン・D. C. メイ著，林　知己夫・脇本和昌訳「確率・統計ハンドブック」森北出版 (1975).

3. 一瀬正巳「誤差論」培風館 (1953).

4. P. R. Bevington and D. K. Robinson, ”Data Reduction and Error Analysis for the Physical Sciences, 2nd edition”, McGraw Hill (1992).

第4章　データのあてはめ

4.1　回帰関数とデータのグラフ表示

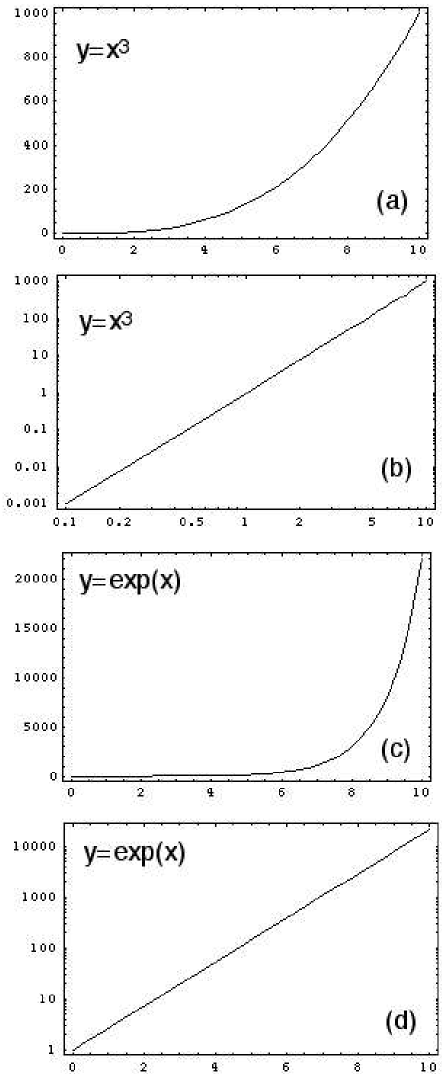


図 4.1: (a) 縦横線形なスケールでの $y = x^3$．(b) 両対数スケールでの $y = x^3$．(c) 線形なスケールでの $y = \exp(x)$．(d) 片対数スケールでの $y = \exp(x)$.

実験ではある変数 x に対する従属変数 y の依存性を求める．すなわち

$$y = f(x),$$

という関数関係を具体的に求めることが多い．この関係を求めることこそ，せまい意味の実験であると言ってもよい．関数 $f(x)$ を**回帰関数**といい，回帰関数を求める作業を**関数回帰**という，この関数はあらかじめ与えられていることもあるし，実験者が自分で探し出さなければならないこともある．多くの場合関数のパラメーターを実験で求めることになる．このようなときに使うのが**最小二乗法**である．当てはめるべき関数には 2 種類ある．**周期関数**と**非周期関数**である．周期関数はフーリエ解析に類した解析法が採られる．これについては章を改めて述べる．

非周期関数として最も簡単なのは一次関数すなわち直線である．もっと複雑な関数でも，ごく狭い変域では直線で近似することができるので，一次関数は最も基本的な関数である．

簡単な例として x を変数，y を得られた結果として

$$y = ax^b \tag{4.1}$$

あるいは

$$y = a\exp(bx) \tag{4.2}$$

の関数に回帰する場合を考えよう．これらを縦横線形なスケールでプロットするのは適当ではない．図 4.1(a),(c) のように，関数が小さいときの変化が把握できない．式 (4.1) の場合は対数をとり

$$\log y = \log a + b\log x,$$

として，図 4.1(b) のように両対数スケールでプロットする．また式 (4.2) の場合も対数をとり

$$\log y = \log a + bx,$$

として図 4.1(d) のように x 軸は線形，y 軸は対数スケールでプロットするのが常識である．もっともふつうわれわれが行う実験では，この図のように何桁もにわたる測定値を得ることは不可能に近い．

図 4.2 はある学術論文に挿入されていた実験結果を示す図である．片対数スケールで表示されており，点線は式 (4.2) のようなかたちの関数に回帰した結果を示している．これについてはつぎの節で示す．多数のデータの平均を黒丸であらわし，その標準偏差を黒丸の上下につけたバー (**エラーバー，誤差棒**) で示している．横軸の値の不確定性も左右のエラーバーで示している．このように各データ点の不確定性も示すのが常識である．

すでに式**??**eqjg03) に示したように物理量の分布が誤差分布 (正規分布・ガウス分布) に回帰する場合はかなり多い．また放射能のように指数関数的に減少する

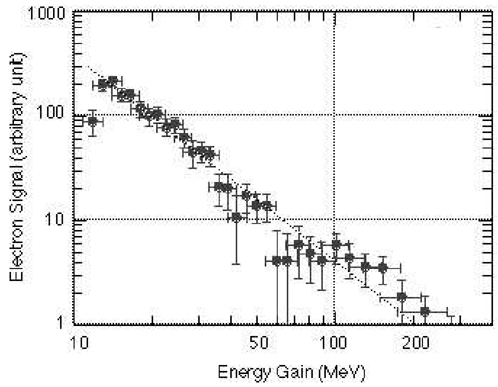


図 4.2: 実験結果をしめすグラフの例．(M.Kando et al., Jap. J. Appl. Phys. 38 (1999) L967.)

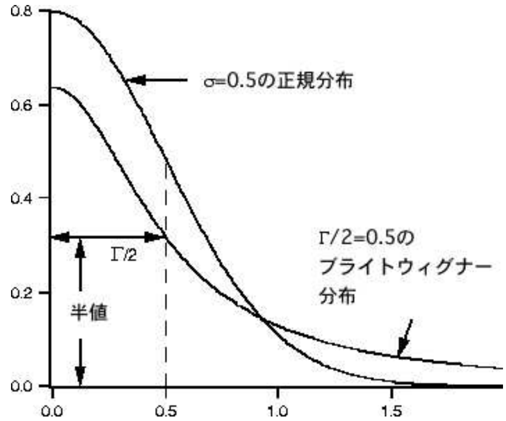


図 4.3: ブライト・ウィグナー分布と正規分布．両者の積分強度を等しく描いた．

量を扱うことも多い．ここではもう一つの回帰関数の例として，**ブライト・ウィグナー分布 (あるいはローレンツ分布あるいはコーシー分布)** を紹介する．この分布はもともとは原子核がエネルギー E を持つ中性子を捕獲する反応の断面積 (式 (11.1) 参照) を，ある共鳴エネルギー E_0 の関数としてあらわしたもので

$$f(E) = \frac{\Gamma^2}{(\Gamma/2)^2 + (E_0 - E)^2}, \tag{4.3}$$

と書かれる．この表記に従ってブライト・ウィグナー分布を図 4.3 に示す．比較のために標準偏差 $\sigma = 0.5$ とした正規分布 (ガウス分布) も描いた．ブライト・ウィグナー分布は正規分布よりもだらだらとしており，半値幅は Γ となる．標準偏差 σ_1, σ_2 のふたつの正規分布のたたみ込み convolution を行うと，偏差は $(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}$ であるが，半値幅 Γ_1, Γ_2 のふたつのブライト・ウィグナー分布のたたみ込み convolution (式 (3.13) 参照) を行うと，半値幅は $\Gamma_1 + \Gamma_2$ となる．ブライト・ウィグナー分布と正規分布のたたみ込みはフォークト Voigt 分布と呼ばれ，分光学で実測のスペクトルデータを解析するときに使われる．

一般に周期的な外力 $f(\omega, t)$ を受ける系が微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(\omega, t),$$

で記述できるとき，定常状態では振幅の 2 乗・蓄積エネルギーなどが式 (4.3) と類似した式で記述される．電気回路の章で述べる共振回路も共鳴現象の応用であるが，実効値まで考慮する必要があるので，式 (4.3) と対応する式を導くことは省略する．

4.2　回帰関数と最小二乗法

最も簡単な関数は 1 次関数すなわち直線である．n 組のデータの対 $(x_1, y_1), ...(x_n.y_n)$ が直線

$$y = a + bx, \tag{4.4}$$

に回帰できるものとして，a, b を決めるという問題を考えよう．最小二乗法では誤差

$$y_i - (a + bx_i),$$

の 2 乗の和

$$Q = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (a + bx_i)]^2, \tag{4.5}$$

が最小になるように a, b をきめる．そのためには

$$\frac{\partial Q}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial b} = 0, \tag{4.6}$$

を解けばよい．この式を**正規方程式**という．

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial a} &= -2\sum[y_i - (a + bx_i)] \\
&= 2(na + b\sum x_i - \sum y_i), \\
\frac{\partial Q}{\partial b} &= -2\sum x_i[y_i - (a + bx_i)] \\
&= 2(a\sum x_i + b\sum x_i^2 - \sum x_i y_i), \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

と変形して a, b について解くと，

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1}{\Delta}\left(\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i\right), \qquad (4.8) \\
b &= \frac{1}{\Delta}\left(n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i\right), \qquad (4.9) \\
\Delta &= n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2, \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

を得る．

なお実験データの信頼性が画一的でない場合は，式 (4.5) のかわりに

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i - (a + bx_i)}{w_i} \right]^2, \tag{4.11}$$

を用いる．w_i は「**重み**」である．たとえばすでに述べたように，観測値 y がボアソン分布に従うなら，その標準偏差は $y^{1/2}$ であるから，$w_i = y_i^{-1/2}$ とおく．

このように定めた a, b は誤差を含んでいる．この誤差を推定するために，誤差の伝播法則を用いる．たとえば a の推定値の誤差は

$$(\sigma_a)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[(\sigma_{yi}^2) \left(\frac{\partial a}{\partial y_i} \right)^2 \right], \tag{4.12}$$

から求める．これはひとつひとつのデータ点の誤差 σ_{yi} が累積して a の誤差を決めているという考え方である．式 (4.8) によれば

$$\frac{\partial a}{\partial y_i} = \frac{\sum x_j^2 - x_i \sum x_j}{n \sum x_j^2 - (\sum x_j)^2},$$

である． 重み w_i がすべて等しいと見なせる場合は

$$\sigma^2 = \sigma_{yi}^2 = \frac{1}{n-2} \sum (y_i - a - bx_i)^2,$$

である．ここで単に平均をとるのであれば，右辺の分母は n であるが，ここでは自由度を考慮して分母を $n-2$ としている．いまはデータを直線に合わせることを試みているのだが， $n=1$ では直線はひけないし，$n=2$ では直線は一義的に決まってしまい，最小二乗法の出る幕はない．こうしたことを考えれば，$n-2$ で割る理由が納得できよう．ただし $n \gg 1$ であれば，n か $n-2$ かで神経質になる必要はない．このとき式 (4.12) によれば

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{4.13}$$

となる．同様に

$$\sigma_b^2 = \frac{n\sigma^2}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \tag{4.14}$$

である．

4.3 行列による表記

大量のデータを見通しよく扱うには行列を利用するとよい．データ点 $(y_i; x_{i1}, ..., x_{ip})$，$i = 1, ..., n$ を

$$y = a_1 x_1 + ... + a_p x_p \tag{4.15}$$

という線形多項式に当てはめる問題に行列を使ってみよう．p はパラメータの数，n はデータの数である．さきの例はここで $p = 2, x_1 = 1$ とおいた特殊な場合に相当する．”′” で転置をあらわすものとして

$$\mathbf{y}' = (y_1, ..., y_n), \tag{4.16}$$

$$(\mathbf{a}') = (a_1, ..., a_p), \tag{4.17}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

とおく．

$$\hat{\mathbf{a}}' = (\hat{a}_1, ..., \hat{a}_p), \tag{4.19}$$

がわれわれの求めたい a の推定値であるとし，

$$\hat{y}_i = \hat{a}_1 x_{i1} + \hat{a}_2 x_{i2} + ... \hat{a}_p x_{ip},$$

とおく．

$$\mathbf{e}' = ((y_1 - \hat{y}_1), ..., (y_n - \hat{y}_n)), \tag{4.20}$$

を残差とすると，

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\hat{\mathbf{a}} + \mathbf{e}, \tag{4.21}$$

である．最小二乗法では

$$Q = \mathbf{e}'\mathbf{e}, \tag{4.22}$$

を最小にするように $\hat{\mathbf{a}}$ をさだめる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \hat{a}} &= \frac{\partial}{\partial \hat{a}} [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{a})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{a})] \\ &= -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

であるから，正規方程式は

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\mathbf{a}} \tag{4.24}$$

である．$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ が存在すれば

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}, \tag{4.25}$$

と $\mathbf{a}$ の推定値が求められる．

回帰関数が 1 次関数ではなく，もっと複雑な関数であっても，正規方程式を作り，回帰関数の係数を決めることができる．1 次関数のつぎに思いつくのは 2 次関数，3 次関数などであろう．これらを選ぶときにまず考えるべきことは，変数が ∞ と $-\infty$ で同じ符号を取るのが物理的に正しいか否かである．同じ符号を

取るべきであれば偶数次関数を，そうでなければ奇数次関数を選ばなければならない．

現在はこうした複雑な関数へのあてはめ計算を自分でやることはほとんどない．データ対 $(x_i.y_i)$ を入力すればパーソナルコンピューターのプログラムが回帰パラメーターを返し，グラフも描いてくれるからである．正規方程式が解析的に解けない場合でさえ，数値計算で解を求めてくれる．ちなみに筆者がふだん使っているプログラムは KaleidaGraph である．

また式 (4.1), (4.2) に挙げた関数は適当に対数をとることにより直線回帰の問題に帰着させることができる．また 図 4.2 ではデータを直線に回帰しているが，これは横軸・縦軸とも対数をとったので可能となった．じつはこの図のひとつひとつのデータ点が，それぞれ 2 次元のデータを直線に回帰したときの傾きである．すなわち 図 4.2 はあるパラメータを横軸に，そのパラメータで実験してデータを直線に載せたときの傾きを縦軸とした図である．個々のデータはうまく直線に乗ったときもあり，そうでないときもある．これがひとめでわかるように各々の点には誤差棒がついている．この誤差棒の長さの計算法が式 (4.13-4.14) である．

じつは現在は変数変換などというややこしいことはせず，数値計算で強引に解く方が一般的である．ただし変数変換にも長所はある．ひとつは厳密な解が求められること，もうひとつは数値計算と異なり収束計算が無いので，解を求めるまでの時間が一定なことである．この第 2 の点は計算結果を実時間制御に使うときなどに有利である．

4.4 重回帰分析

最小二乗法の使い方をもっと拡張したのが**重回帰分析**である．実験データのあてはめは重回帰分析の一つの応用にすぎないということもできる．ここで ITER 設計のために作られたスケーリングを例にとろう．装置のパラメータとその性能との関係を**スケーリング**という．核融合装置の性能はプラズマの温度と閉じこめ時間できまる．そこでトカマク (代表的な核融合装置) の閉じこめ時間を

$$\tau_i = (\exp a_0) b_{i1}^{a1} b_{i2}^{a2} b_{i3}^{a3} ...,$$

と仮定する．$b_1, b_2, ...$ には装置のプラズマ電流 I，閉じ込め磁場 B，電力 P，電子密度 n，イオンの質量数 M，大半径 R，逆アスペクト比 ϵ，楕円度 κ をとることにする．この場合はどのような単位を取ったかをあきらかにする必要がある．ITER の設計ではそれぞれ

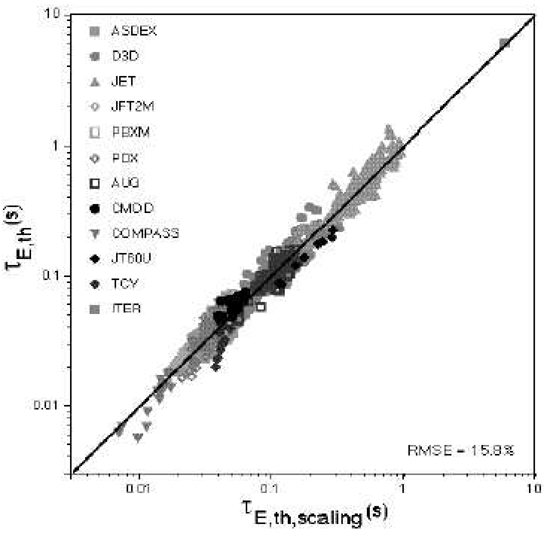


図 4.4: 重回帰分析によるあてはめで得たトカマクのスケーリング．横軸は実験値．縦軸は本文にあるスケーリング則．(ITER Physics Basis, Nucl. Fusion 39 (1999) 2137.)

sec, MA, T, MW, $10^{19}\mathrm{m}^{-3}$, AMU, m を単位とした．$i = 1, 2, ...$ は図 4.4 の左側に列挙してある，実際に実験した 10 あまりのトカマクをとる．同じトカマクでも条件が異なれば独立に数える．さきの式の対数をとると

$$\log \tau = a_0 + a_1 \log b_{i1} + a_2 \log b_{i2} + ...,$$

のような式が実験の数だけできる．$\mathbf{y} = (y_i) = (\log \tau_i)$,$\mathbf{x} = (x_{ij}) = (\log b_{ij})$ とおいて，最小二乗法を適用して $\mathbf{a} = (a_j)$ の推定値が求められる．このようにして求めたスケーリング

$$\tau = 0.0365 I^{0.97} B^{0.08} P^{-0.63} n^{0.41} M^{0.20} R^{1.93} \epsilon^{0.23} \kappa^{0.67},$$

を縦軸に，実験的に求めた閉じ込め時間を横軸にとると図 4.4 を得た．

この例からわかるように，重回帰分析は現象を整理し，そこから何らかの法則性を見い出すてがかりをあたえるものである．主に生物学，工学，社会科学などで威力を発揮する．先に述べた「実験計画法」という領域もこの延長線上にある．

4.5 補間と外挿

測定点と測定点の間のデータがない点の物理量を推定することを**補間**という．いままでは，まず回帰した

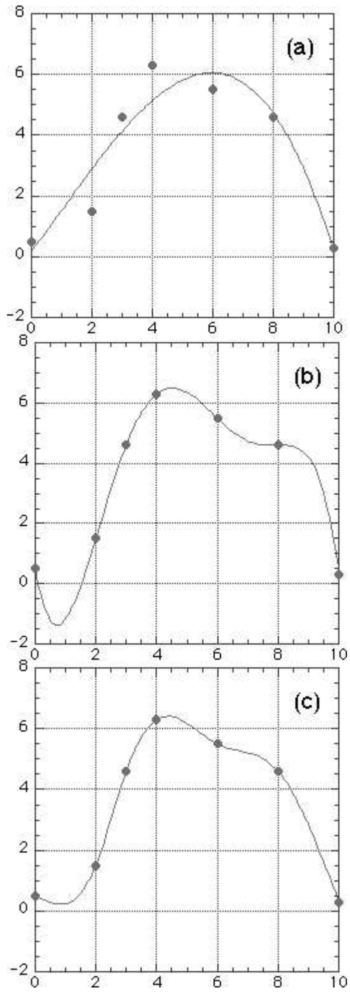


図 4.5: (a) 3 次式への最小二乗回帰．(b) 6 次式によるラグランジェ補間．(c) 3 次のスプライン補間．

い式があり，その式のパラメータを決めるために最小二乗法という方法を導入した．見方を変えて、データがまず存在し，このデータを説明する式を探すとしよう．測定点の点数が n であれば，$n-1$ 次の多項式を使い，すべての測定点をとおる回帰関数がつくれる．このとき回帰誤差をゼロとなる．この多項式を用いて測定点と測定点の間のデータがない点での値を推定できる．この方法を**ラグランジェ補間**という．ラグランジェ補間では物理的にあり得ない振動が出てくることが多い．図 4.5 は同じデータ点にいろいろな曲線を当てはめた例である．(a) は 3 次式への最小二乗回帰である．もし，これらのデータ点がすべて正しいとすれば，回帰曲線は (b)-(c) のようにすべてのデータ点を通るはずである．しかし物理量が負にならないとすれば，(b) のラグランジェ補間はあきらかに不適切である．(c) は**スプライン補間**という方法で，適当に区間に分けて 3 次関数で近似し，これらがなめらかにつないだものである．詳細は参考書に譲る．

測定した点が変数 x の変域 $x_1 < x < x_2$ に限られているとき，測定域外 ($x < x_1$ あるいは $x > x_2$) の物理量を推定することを**外挿**という ($x < x_1$ の値の推定を特に区別して**内挿**ということもある)．測定値 $f(x)$ が $x = 0$ において $f(0) = 0$ となるべきであっても，$x = 0$ に外挿してみると有限な値となるときは，その値が測定法固有の雑音を示していることがある．

問題

1. n 組のデータ対 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ が曲線 $y = ax^2 + b$ に回帰できるものとして，誤差の 2 乗和を最小とする a, b を求める式を導け．

2. 図 4.6 はある学術雑誌から転載した実験データである．みっつのデータはどのような関数に回帰するのが適当か．

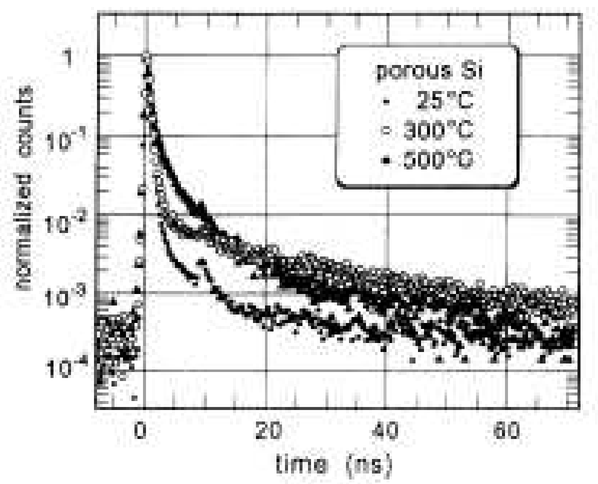


図 4.6: 多孔質 Si 中での陽電子の寿命の温度依存性．(R.Suzuki et al., Phys. Rev. B49 (1994) 17484.)

参考書

市田浩三，吉本富士市「スプライン関数とその応用」教育出版 (1979) および第 3 章の参考書．

第5章　周波数解析

5.1　フーリエ級数

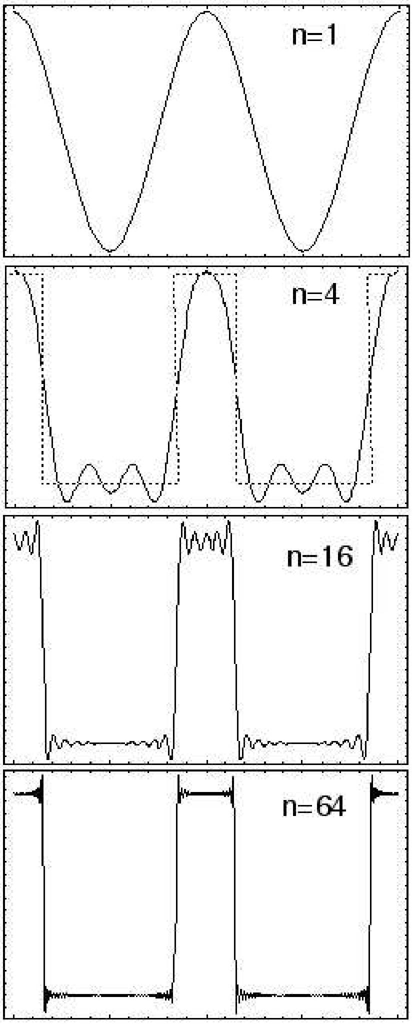


図 5.1: 方形波の cos 関数による近似．(b) の近似波形点線に重ねて点線で示したのがもとの波形．

ここまでは単調に増加あるいは減少する関数を扱ってきた．$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$ のような多項式も変数 x が十分大きく，あるいは小さくなると，結局は増加あるいは減少する関数になってしまう．ところがこのような単純な関数ではあらわせない現象がたくさんある．気温の変化を例に取ろう．気温は上がりっぱなし，下がりっぱなしということはない．昨日に比べて今日は温度が高いとか低いとかいうことはあるが，昼は温度が高く夜は低いといえるであろう．おおまかには，地球の自転周期と等しい周期，1 日を持つ周期関数といえそうである．もっと長い目でみれば，異常気象といわれてはいるが，夏は暑く冬は寒いという周期を，地球が太陽のまわりを回り始めて以来繰り返している．気温はまた 1 年という周期を持つ周期関数でもある．

代表的な周期関数は

$$y = \cos(2\pi t/T + \phi),$$

である．T は周期であって，T を 1 年とすれば年間の，1 日とすれば 1 日の間の気温変化を近似することができそうである．ϕ は位相定数であって，どこからどこまでを周期とみるかを定める．年間の気温変化を議論するときに，1 年を夏から始まるとみるか，冬から始まるとみるかで位相定数は異なる．周期だけに注目するならこの位相定数はたいした問題ではない．また cos のかわりに sin を使ってもよい．

周期 T の逆数を振動数あるいは周波数といい f であらわす．周期運動は円周をぐるぐる回る運動と考えることが出来る．この見方から，$\omega = 2\pi f$ を角振動数あるいは角周波数という．

1 日の気温の変化は，昼は温度が高く夜は低いというだけのことで，三角関数とは違うといわれるかもしれない．しかしどんな周期関数も三角関数の和であらわすことができる．図 5.1 は矩形波 ((b) に点線で示した波形) を三角関数によってあらわした例である．幅 τ 周期 T の直流成分を持たない (平均 0 の) 矩形波列は

$$y(t) \sim \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\pi\tau/T}{k\pi\tau/T} \cos\frac{2\pi kt}{T},$$

で近似できる．図は $\tau/T = 0.3$ の場合である． $n = 1$ のときは余弦波そのものであるが， n を挙げていくに従い矩形波らしくなっていく．ただし $n = 64$ のときにも立ち上がり，立ち下がり (変なことばだが業界用語である) 部分にひげのようなものが見える．これをオーバーシュート overshoot, アンダーシュート undershoot という．これらは n を大きくすると、鋭くはなるが，なくなることはない．このような現象を**ギブス Gibbs の現象**という．

もっと数学的に扱うことにする．つぎの関係を三角関数の**直交関係**という．

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0, \tag{5.1}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0,\ (m \neq n)$$
$$= \pi,\ (m = n) \qquad (5.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0,\ (m \neq n)$$
$$= \pi,\ (m = n) \qquad (5.3)$$

証明は省略する．さて，周期 2π の関数 $f(x)$ が三角関数から作られた無限級数

$$\begin{aligned} f(x) &\sim a_0/2 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) \\ &+ (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)... \\ &+ (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + ..., \end{aligned} \qquad (5.4)$$

と表せるものとする．

a_0 を求めるために両辺を $-\pi$ から π まで積分する．$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = 0$ であるから，

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad (5.5)$$

である．a_k を求めるには式 (5.4) の両辺に $\cos kx$ をかけて直交関係を使う．結果は

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, ..., \qquad (5.6)$$

である．b_k も同様に $\sin kx$ をかけて

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2, ..., \qquad (5.7)$$

となる．a_k, b_k を**フーリエ係数**，式 (5.4) の右辺を**フーリエ級数**という．

フーリエ級数は必ずしも $f(x)$ に収束しない．これは図 5.4 のギブスの現象から理解できよう．しかしフーリエ級数の部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a_0/2 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) \\ &+ (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x)... \\ &+ (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \end{aligned} \qquad (5.8)$$

は，つぎの節で示すように $f(x)$ の最小二乗近似になっている．

5.2 最小二乗法とフーリエ多項式

与えられた関数 $f(x)$ に対して三角多項式

$$\begin{aligned} T_n(x) &= A_0/2 + (A_1 \cos x + B_1 \sin x) \\ &+ (A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x)... \\ &+ (A_n \cos nx + B_n \sin nx), \end{aligned} \qquad (5.9)$$

を考える．誤差の二乗

$$E_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n(x)]^2 dx, \qquad (5.10)$$

を最小にするように A_k, B_k を定めるとどうなるか?

係数の任意のひとつ $A_k, (1 \le k \le n)$ をとりあげ，

$$T_n(x) - A_k \cos kx = T_n^k(x),$$

とおけば，

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [(f(x) - T_n^k(x)) - A_k \cos kx]^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n^k(x)]^2 dx \\ &- \frac{A_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n^k(x)]\cos kx dx \\ &+ \frac{A_k^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

$T_n^k(x)$ は $\cos kx$ を含まないから，直交関係により

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n^k(x)\cos kx dx = 0,$$

である．式 (5.6) を用いて変形すると，

$$E_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_n^k(x)]^2 dx - a_k A_k + \frac{1}{2}A_k^2,$$

となる．E_n を最小とする A_k をもとめるために $\partial E_n/\partial A_k$ をつくると，$A_k = a_k$ のときに E_n が最小となることがわかる．同様に $B_k = b_k, A_0 = a_0$ を得る．すなわち式 (5.4) は最小二乗法の意味で最良の多項式を与える．

一般に

$$\begin{aligned} \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)p(x)dx &= 0, \quad n \neq m, \\ &= A_n, \quad n = m, \end{aligned} \qquad (5.12)$$

を満たす関数系を**直交関数形**という．$p(x)$ を重み、A_n をノルムという．三角関数の他に直交関数系をなすものに Legendre 多項式，Tchebyecheff 多項式，Laguerre 多項式などがある．また Bessel 関数などもある意味で直交関数系をなすが，詳細は省略する．

つぎに $f(x)$ の値が離散的なデータ $f(x_i)$ として与えられたものとして，さきの最小二乗法の問題を行列を使って扱ってみよう．$y = f(x)$ を既知の関数 $\phi_0(x), \phi_1(x), ...$ の線形結合であらわす．

$$y = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ... + a_p\phi_p(x), \qquad (5.13)$$

$x_1, ..., x_n$ におけるデータが $\mathbf{y}' = (y_1, ..., y_n)$ であったとする．

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \ldots & \phi_p(x_1) \\ \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \ldots & \phi_p(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(x_n) & \phi_2(x_n) & \ldots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

とおけば，正規方程式は $\mathbf{X}'\mathbf{y} = \mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{y}\hat{\mathbf{a}}$ となり，$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ より $\hat{\mathbf{a}}$　を得る．ただし

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}'\mathbf{X})_{ij} &= \sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k), \\ (\mathbf{X}'\mathbf{y})_i &= \sum_{k=0}^{n} y_i(x_k)\phi_i(x_k),\end{aligned}$$

である．ここまでの手順は $\phi_k(x)$ が直交関数系であるとないとにかかわらず成り立つ．$\phi_k(x)$ が直交関数系をなすときには

$$\sum_{k=0}^{n} \phi_i(x_k)\phi_j(x_k) = 0, \quad i \neq j,$$

となるので，行列 $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ が直交行列となり，計算がいちぢるしく簡単になる．

この章の始めに，周期関数を近似するためと称してフーリエ級数を導入した．ではフーリエ級数では単調に増加あるいは減少する関数を近似できないのであろうか．結論から先にいうと，変数のとる領域が有限なとき，この領域内で単調に増加あるいは減少する関数を近似することはできる．たとえば

$$f(x) = x/\pi, \quad -\pi < x < \pi,$$

のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k},$$

である．そして実験では，変数の値を ∞ にも $-\infty$ にもすることができないので，実験のデータ処理においてはこれで十分である．

5.3　複素型フーリエ級数

式 (5.4) すなわち

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (5.15)$$

に対して，まず

$$a_{-n} = a_n, b_{-n} = b_n, b_0 = 0, \quad (5.16)$$

を定義する．さらに

$$c_n = (a_n - ib_n)/2, c_{-n} = (a_n + ib_n)/2, \quad (5.17)$$

とおけば

$$a_n = c_n + c_{-n}, b_n = i(c_n - c_{-n}), \quad (5.18)$$

である．複素関数論によれば

$$\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x, \quad (5.19)$$

であるから式 (5.15) を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) \sim & \sum_{n=0}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos nx + i(c_n - c_{-n}) \sin nx] \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(\cos nx + i \sin nx) \\ & + c_{-n}(\cos nx - i \sin nx)] \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} [c_n \exp(inx) + c_{-n} \exp(-inx)] \\ = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp inx, \end{aligned} \quad (5.20)$$

と書くことができる (最後の行に移るときに n の値域を変えたことに注意)．このことは直感的には De Moivre の定理

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

を思い浮かべれば理解できよう．$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp inx$ の右辺を**複素型フーリエ級数**という．

5.4　線形系の動特性

なんらかの系があって，それを外部から刺激したときにどのような応答を返すかは重要な問題である．電気回路理論や自動制御理論では系の物理的な構造には深入りせず，もっぱらこの応答を研究する．このとき問題となるのは応答の時間的な速さである．時間的な側面に注目した入出力特性を**動特性**という．

ある系が入力 $f_1(t)$ に対し出力 $g_1(t)$ を与え，入力 $f_2(t)$ に対しては出力 $g_2(t)$ を与えるとしよう．このとき c_1, c_2 を任意の定数として，この系が入力 $c_1 f_1(t) +$

$c_2 f_2(t)$ に対し出力 $c_1 g_1(t)+c_2 g_2(t)$ を与えるとき．この系は線形であるという．

すでに述べたようにフーリエ級数の部分和は任意の関数 $f(t)$ の最小二乗近似である．したがって線形な系の動特性を調べるには ω の値を変えながら，入力を $\cos\omega t$ あるいは $\sin\omega t$ としたときの出力を調べておけば十分である．動特性は周波数特性で記述されるといっても良い．

線形系はいわば理想化された系であって，現実の系はほとんどが非線形であることを忘れてはならない．例えば，増幅器は電源がなければ動作しない．電圧信号増幅器においては，電源電圧を越える出力電圧は得られない．この飽和現象はきわめて一般的な非線形現象である．

なおこの分野では $(-1)^{1/2}$ を i と書くかわりに j と書くのが普通である．これは電流を i であらわすことが多いためである．以下ここでもこの流儀に従う．

入力が系を介してどのように出力に伝えられるかを示す関数を**伝達関数**という．入力の周波数特性に伝達関数を乗ずると出力の周波数特性が得られる．伝達関数は複素関数である．**ボーデ (あるいはボード Bode) 線図**は伝達関数を図示するものである．これは伝達関数の絶対値 (電気工学や制御工学では利得あるいは**ゲイン gain** という) と**位相 phase** を縦軸に，角周波数 ω を横軸に，いずれも対数目盛りで描いた 2 枚 1 組のグラフである．伝達関数を $z(\omega)=x(\omega)+jy(\omega)$ とすれば，絶対値は $|z|=(x^2+y^2)^{1/2}$，位相は $\tan^{-1} y/x$ である．

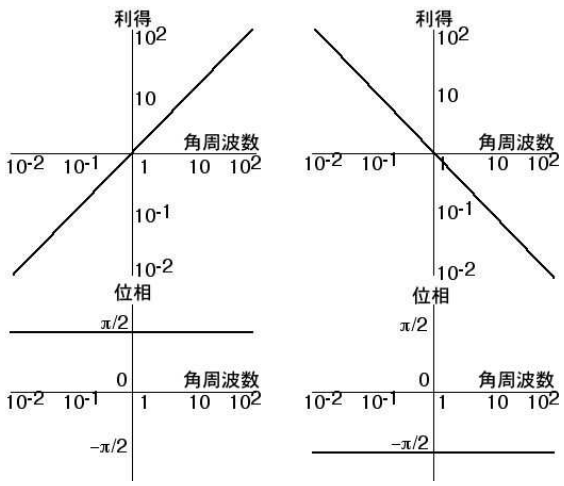


図 5.2: 微分特性 (a) および積分特性 (b) のボーデ線図．

周波数特性を議論するときにしばしば $\cos\omega t$ あるいは $\sin\omega t$ と書くかわりに $\exp j\omega t$ と書いてしまう．この根拠はやはり式 (5.19) である．入力が cos 関数のときは複素応答を計算しその実部を取り出し，また入力が sin 関数のときはやはり複素応答を計算しその虚部を取り出せばよい．わざわざ難しくしているようだが，こうすると系の特性を微分方程式であらわし，その周波数特性を調べるとき，微分方程式の計算がたんなる代数演算になってしまうからである．もとの信号が正弦波であるとして，これを

$$f=\exp j\omega t,$$

と書く．この微分は

$$df/dt = j\omega \exp j\omega t = j\omega f, \tag{5.21}$$

積分は

$$\int f dt = \exp j\omega t/(j\omega) = f/(j\omega), \tag{5.22}$$

である．平たくいえば**微分は $j\omega$ をかけること、積分は $j\omega$ で割ること**である．どのような信号もフーリエ分解すれば正弦波の線形結合で表せる．ということは，「微分は $j\omega$ をかけること、積分は $j\omega$ で割ること」というおまじないは，どのような信号にもあてはまるということである．

図 5.2 は微分動作と積分動作のボーデ線図である．微分動作の方だけ説明しよう．式 (5.21) により，伝達関数は $(df/dt)/f$ であるから，その絶対値は $(\omega^2)^{1/2}=\omega$ となる．また位相 (角) は $\tan\omega/0=\pi/2$ である．これらを両対数にプロットすると図のようになる．

5.5 データの標本化

少し違った見方をしよう．時間的な変化が速い現象は，式 (5.4) のようにフーリエ級数表示したとき，大きな n を持つ係数 a_n, b_n の値が大きい．いいかえれば，どこまで大きな n 値まで考慮しなければならないかが現象の「速さ」の目安を与えるといえる．

時間的に変化する信号を計算機で解析するために，信号を一定の時間間隔で数値化する．このように間隔をおいてデータ収集を行うことを**標本化 sampling** という．当然のことながらこの標本化の周期は現象の早さにあわせなければならない．

人為的な図であるが，図 5.3 を一週間の気温の変化と思っていただきたい．昼は暑く夜は寒いという変化を 1 日を周期として繰り返している．これを 20 時間を周期として標本化すると黒丸のようになる．このデータ点をつないでいくと，月曜日はもっとも寒く，

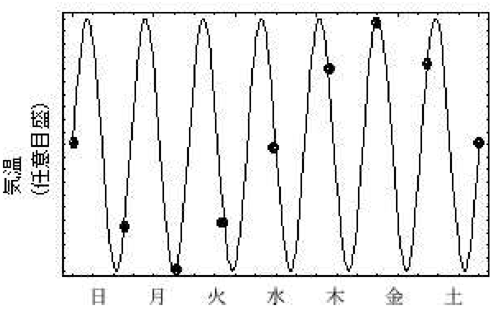


図 5.3: エイリアス効果.

金曜日はもっとも暑いということになってしまう．このように標本化周期のえらび方でありもしない現象が現れることを**エイリアス効果 aliasing** (アリアスとか異名効果とかいう日本語もある) という．気温の周期の変化が 24 時間であるとすれば，その周期は 10^{-6}Hz のオーダーである．われわれが実験で相手にする信号は kHz, MHz, GHz のオーダーであるが，このエイリアス効果はよく目にすることである．

この効果を起こさないために，次の**標本化定理 (サンプリング定理)** を理解する必要がある．すなわち，

「もともとの信号の周波数の帯域が W より小さいとき，もとの信号から間隔 $1/(2W)$ で標本化した値を $f(n/(2W)), n = 1, 2, ...$ とすれば

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\frac{n}{2W}) \frac{\sin(2Wx - n)}{\pi(2Wx - n)}, \tag{5.23}$$

である.」

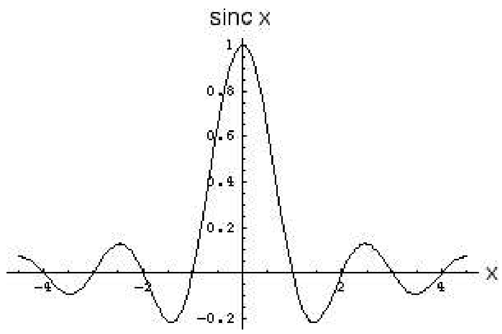


図 5.4: sinc 関数.

ここで周期 $1/(2W)$ を**ナイキスト周期**という．関数

$$\mathrm{sincx} = \frac{\sin \pi \mathrm{x}}{\pi \mathrm{x}}, \tag{5.24}$$

は信号理論などでよく出てくるもので，図 5.4 に示すように $x = 0, \pm1, \pm2, ...$ で 0 である．したがって式 (5.23) が標本化した点で正しい値を示すことは直感的に理解できる．この定理によれば標本化周期は $1/(2W)$ より小さくしなければならない．ただし厳密にいえば，式 (5.23) にしたがって点と点の間の値を内挿できるためにはデータ点が無限にある必要がある．

もともとの信号の帯域が W より大きいときに $1/(2W)$ で標本化して，中間点の値を内挿すると大きな誤差が生じる．たとえば 5Hz の信号を 4Hz で標本化すると 1Hz の信号が現れる．これがさきほどのエイリアス効果である．実験の現場では信号の帯域幅の予想ができない場合もある．このときは AD 変換器の前にナイキスト周波数以上の周波数成分を落とすフィルター (アンチ・エイリアス・フィルター) をつける．

5.6 空間の周波数解析

いままで時間的に変化する信号の周波数解析を述べてきた．しかし周波数解析は空間にもあてはめることができる．近年計算機による画像処理やパターン認識が普及したのにつれ，空間の周波数解析は急速に発展した．時間領域の角周波数 ω に対応するものは空間領域では波数であって，k であらわす．時間周期 (しばしば T であらわす) に対応するのは波長 λ である．最大の違いは時間は 1 次元であるが，空間は 3 次元の拡がりを持つことである．**モアレ効果**は空間におけるエイリアス効果とみなすことができる．

相対性理論では 4 次元空間 (ミンコフスキー空間) として時間と空間を統一して扱う．この扱いでは k と ω は統一され，また運動量とエネルギーも統一される．

問題

1. 身近にモアレ現象が観測できる例を挙げなさい．

2. 音を CD に録音するときは，音を標本化している．人間に聞こえる音の周波数と，CD の標本化周波数を調べ，両者を比較しなさい．

参考書

1. 高橋健人「物理数学」培風館 (1958).

2. 南　茂夫「科学計測のための波形データ処理」CQ 出版社 (1986).

第6章　電気回路

6.1　回路変数と回路要素

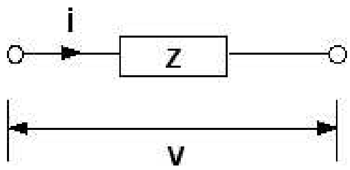


図 6.1: 電流 i，電圧 v とインピーダンス Z.

図のように 2 点間に流れる電流を i，2 点間の電位差 (電圧) を v とする．これらは一般に時間の関数であるので，$i(t), v(t)$ と書く．時間応答は周波数応答とうらはらの関係にある．一方がわかれば他方を導くことが可能である．この意味で，i, t を $i(\omega), v(\omega)$ とも書く．この図のように 2 つの端子を持つ回路を 2 端子回路という．

回路理論ではこれらの v と i を変数とする．このふたつは独立でなく，**インピーダンス** Z により

$$v = Zi, \tag{6.1}$$

のように関係づけられる．v, i, Z の単位はそれぞれ volt, ampere, ohm であって，V,A,Ω であらわす．インピーダンスは動詞 impede (じゃまをする，妨げる) から出たことばである．インピーダンスの逆数を**アドミッタンス** Y という．これを用いれば $i = Yv$ である．

インピーダンス Z は回路要素によって定まる．電圧と電流がどのように変化してもこれらのの間に比例関係

$$v(t) = Ri(t), \tag{6.2}$$

を与える素子を抵抗という．R の単位は ohm (Ω) である．また

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \tag{6.3}$$

なる関係を与える素子をインダクタあるいはインダクタンスという．その単位は henry (H) である．最後に，

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}, \tag{6.4}$$

なる関係を与える素子をコンデンサ (コンデンサー). キャパシタンス (キャパシタ) という．その単位は farad (F) である．

時間的に変化する電流あるいは電圧はフーリエ多項式で近似できる．したがってある時刻の電流あるいは電圧 $i(t), v(t)$ を，$i(0), v(0)$ を振幅として，角周波数 ω) の関数として，$i(\omega) = i(0)\exp[j\omega t]$ あるいは $v(\omega) = v(0)\exp[j\omega t]$ とあらわすこともできる．この流儀で書けば式 (6.3-6.4) はそれぞれ

$$v(\omega) = j\omega Li(\omega), \quad v(\omega) = \frac{i(\omega)}{j\omega C}, \tag{6.5}$$

となる．周波数領域では抵抗，インダクタ，コンデンサのインピーダンスはそれぞれ $R, j\omega L, 1/(j\omega C)$ と考えることができる．電流が流れるために，周波数が大きいほどインダクタはじゃまになり，周波数が小さいほどキャパシタはじゃまになる．

式 (6.2, 6.5) は $R, j\omega L, 1/(j\omega C)$ の次元が同じであることを示している．ω の次元が T^{-1} であることから，RC と L/R は T の次元を持つことになる．

6.2　共振回路

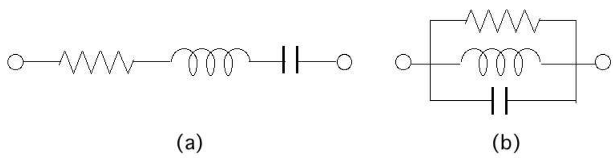


図 6.2: (a) 直列共振回路と (b) 並列共振回路.

動的な物理現象を解析する際に，電気回路をモデルとすることが多い．とくに特定の周波数で刺激すると，はげしく反応する現象にはここで述べる**共振回路**を等価回路とする．

図 6.2 に示したふたつの 2 端子回路は共振回路とよばれるものである．(a) の直列共振回路のインピーダンスは

$$Z = R + j\omega L + 1/j\omega C, \tag{6.6}$$

である．

$$\omega_0 = 1/(LC)^{1/2}, \tag{6.7}$$

を共振周波数という．これを用いると

$$Z = R + j\omega L(1 - \omega_0^2/\omega^2), \tag{6.8}$$

となる．$\omega = \omega_0$ のときにインピーダンス Z は最小値 R をとる．この回路を電圧源 E で励振すると流れる

電流は $I = E/Z$ であって $\omega = \omega_0$ のとき $I = E/R$ である．R が 0 であれば I は無限大になる．実際は 0 になることはないが，式 (6.8) 右辺の第 1 項 R が第 2 項に較べて十分小さくなるときは，あたかも電流が無限大になったかのように感じられることがある．

$\omega = \omega_0$ のときインピーダンスの逆数アドミッタンスは最大となりその両側で小さくなるが，アドミッタンスの最大値の $1/2^{1/2}$ を与える周波数を ω_1, ω_2 とするとき，$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ を共振の幅といい

$$Q = \omega_0/\Delta\omega, \tag{6.9}$$

を Q 値という．直列共振回路の Q 値は

$$Q \sim \omega_0 L/R = 1/(\omega_0 CR), \tag{6.10}$$

である．

図 6.2(b) は並列共振回路である．この回路の 2 端子間のアドミッタンスは

$$Y = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C, \tag{6.11}$$

であって，式 (6.7) によって定義される共振周波数で最大，いいかえればインピーダンスは最小となる．

6.3　微分回路と積分回路

すでに述べたように，もとの信号が正弦波であるとして，これを $f = \exp j\omega t$ と書くと，この微分は $df/dt = j\omega \exp j\omega t = j\omega f$，積分は $\int f dt = \exp j\omega t/(j\omega) = f/(j\omega)$ である．入力 f に対して出力 df/dt あるいは $\int f dt$ を与える回路を考えよう．

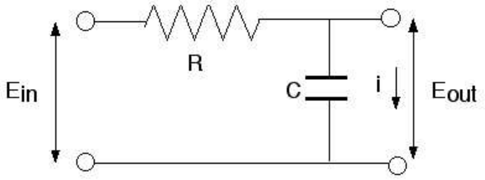


図 6.3: 積分回路.

図 6.3 の回路は**積分回路**とよばれるものである．右側のふたつの端子をつないだときに流れる電流を i とすれば，この回路について次の 2 式が成り立つ．

$$E_{in} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) i, \ E_{out} = \frac{i}{j\omega C}, \tag{6.12}$$

これから i を消去すると

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{1}{j\omega RC + 1}, \tag{6.13}$$

を得る．ここで $\omega RC >> 1$ が成り立つとすれば

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} \sim \frac{1}{j\omega RC}, \tag{6.14}$$

となる．$1/(j\omega)$ は積分と等価である．RC はすでに述べたように時間の次元を持つ．RC を時定数という．ω が $1/(RC)$ よりも大きい正弦波に対しては，この回路は入力を積分する．一般に信号は広い周波数成分を持つが，これらのうちで積分回路で積分できるのは高周波数成分だけである．

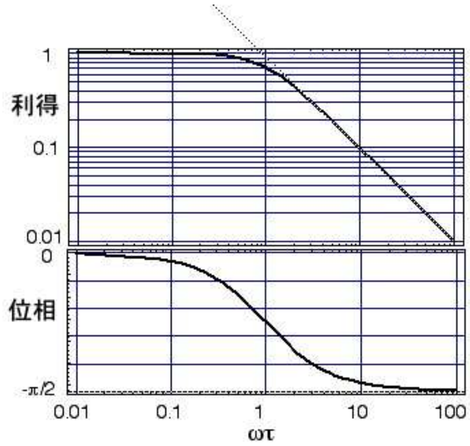


図 6.4: 積分回路 (1 次おくれ回路) のボーデ線図．点線は理想的な積分回路のボーデ線図.

図 6.4 は積分回路のボーデ線図である．ただし $f_H = 1/(2\pi RC)$ である．理想的な積分回路のボーデ線図は図に点線で示したように，振幅特性は傾き一定 -20dB/dec の直線，位相特性は一定で -90 度である．

ただし dB(**デシベル decibel**) は電圧比あるいは電流比を示す単位で，ふたつの電圧値 v_1, v_2 あるいはふたつの電流値 i_1, i_2 を比較するとき

$$\mathrm{dB} = 20\log_{10}(v_1/v_2) = 20\log_{10}(i_1/i_2),$$

を慣例として用いる．なおふたつの電力値 p_1, p_2 を比較するときは

$$\mathrm{dB} = 10\log_{10}(p_1/p_2),$$

を用いる．deci は比較する数値が一桁違うことを示す．

一般に入出力関係が式 (6.13) のかたちで与えられる回路 (図 6.3 の回路) すなわち τ を時定数として

$$\frac{X_{out}}{X_{in}} = \frac{1}{j\omega\tau + 1}, \tag{6.15}$$

と表される回路を**1 次おくれ回路** (自動制御理論では 1 次おくれ要素) という．回路設計ではこの特性を図 6.4 に示すように直線 (漸近線) で近似することが多い．振幅特性を積分特性を持つ領域と，持たない領域を 2 本の直線で近似すると，この 2 本の直線の交点の周波数が f_H である．積分特性がある部分の傾きは -20dB/dec である．一方の位相特性は 3 本の直線をつないだもの，すなわち 0^0，周波数 f_H において -45^0 となる傾き -45^0/dec の直線，および -90^0 の直線をつないだもので近似できる．

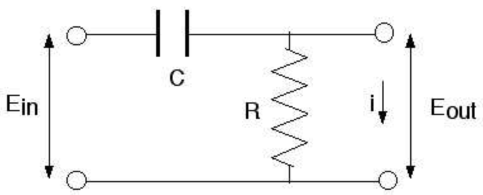


図 6.5: 微分回路.

図6.5 は積分回路の C と R の位置を入れ替えたものである．これを**微分回路**という．やはり右側のふたつの端子をつないだときに流れる電流を i とすれば，この回路については次の 2 式が成り立つ.

$$E_{in} = \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) i, \quad E_{out} = Ri, \tag{6.16}$$

これから i を消去すると

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC + 1}, \tag{6.17}$$

を得る．ここで今度は $\omega RC << 1$, が成り立つとすれば

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} \sim j\omega RC, \tag{6.18}$$

となる．$j\omega$ は微分と等価であったことを思い出していただきたい．RC をやはり時定数という．ω が $1/(RC)$ よりも小さい正弦波に対しては出力は入力の微分となる．一般に信号は広い周波数成分を持つが，これらのうちで微分回路で微分できるのは低周波数成分だけである．図 6.6 は微分回路のボーデ線図である．積分回路のボーデ線図と対照的である．

式 (6.13)，(6.17) の左辺は E_{out}/E_{in} であった．これは右辺の特性を持つ回路が，任意の入力に与える変化を示すものである．これらは先に紹介した伝達関数の好例である．

ここまでの仮定とは逆に式 (6.13) では $\omega RC << 1$, 式 (6.17) では $\omega RC >> 1$ が成り立つとしてみよう．

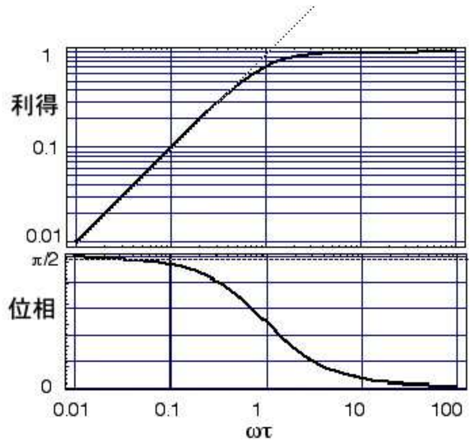


図 6.6: 微分回路のボーデ線図.

するとどちらの場合も $E_{out} = E_{in}$ となる．式 (6.13) で $\omega RC << 1$ が成り立つのは ω が小さい場合であり，周波数の低い信号はこの回路をすどおりするとみなすことができる．この見方から，さきの積分回路を**低域濾波回路 (ロウパスフィルター low pass filter)** という．同様に (というより「逆に」というべきかもしれないが) 式 (6.17) で $\omega RC >> 1$ が成り立つのは ω が大きい場合であり，周波数の高い信号はこの回路をすどおりするとみなすことができる．この見方から，さきの積分回路を**高域濾波回路 (ハイパスフィルター high pass filter)** という．周波数が高いとか低いとかいったが，定量的に何 Hz の周波数より高い，あるいは低いとそういうことになるか，その目安を与えるのが $1/(RC)$ である．

実験誤差の章で最初に誤差 (雑音) について述べたが，実験でよく出くわすのは動的な雑音である．例えば，電気的な信号に AC 周波数の 60Hz が重畳されることが多い．また 1/f 雑音と称する，パワーが周波数に反比例する雑音は自然界「ゆらぎ」として広く存在する．このような雑音は濾波回路により取り除くことができる．

ここでは抵抗とコンデンサで積分回路と微分回路を構成したが，抵抗とインダクタンスでも積分回路と微分回路を構成することもできる．ここに示した積分回路や微分回路のように 4 つの端子を持つ回路を 4 端子回路という．

6.4 分布定数回路の例：伝送線路

ここまでは抵抗，コンデンサなどの独立した素子の前後の電圧降下を問題にしてきた．このように各素子

の回路定数に電磁エネルギー伝達の物理的な機構を集中させて議論できる回路を**集中定数回路**という．

しかし回路素子の大きさと，その素子を通過する電磁波 (すなわち信号) の波長を比べたとき、前者が後者に対して無視できなくなると，このようなとり扱いは不可能となる．また．もともと抵抗，コンデンサなどの素子からできていない物体における電磁エネルギー伝達を議論するとき，この物体があたかも回路素子からできた回路であるかのようにみなすことがある． この仮想的な回路を等価回路という．このように集中定数回路ではない回路を，さまざまな値の R, C, L 素子が連続的に分布しているとみなして，**分布定数回路**という．

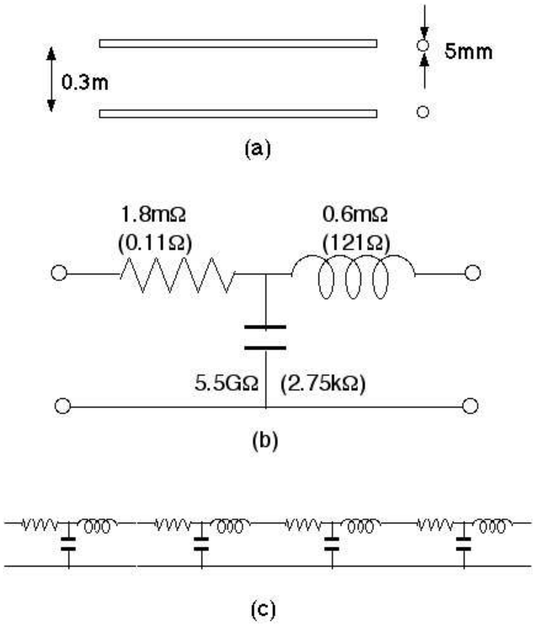


図 6.7: 2 本の導線とその等価回路．(b) の数値は $f = 50$Hz および $f = 10$MHz (かっこ内の数値) のときのインピーダンス．

例として 図 6.7(a) の 2 本の導線を考えよう．ある有限の長さをとるとこれは (b) の等価回路であらわすことができる，この導線対が長距離にわたって張られたときの等価回路は (c) のようになる．導線の半径を r，2 線間の距離を d, $d >> r$ とする．単位長さあたりのインダクタンスとキャパシタンスは

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \log \frac{d}{r} \ [\mathrm{H/m}],$$

$$C = \frac{\pi \epsilon_0}{\log(d/r)} \ [\mathrm{F/m}],$$

で与えられる．

図 6.7(b) には $r = 5$mm, $d = 0.3$m とし長さを 1m としたときのこれらの等価的な素子の具体的なインピーダンス値 $R, \omega L, 1/(\omega C)$ が記入してある．当然なことであるが，これらは周波数に依存する． (b) の値は $f = 50$Hz および $f = 10$MHz (かっこ内の数値) のときの値である．抵抗 R も表皮効果などのため周波数に依存するので，図の数値にはこの効果を考慮した．50Hz では R は ωL よりひと桁大きく，また $1/\omega C$ はこれらよりもはるかに大きい．単に純抵抗を持つ 2 本の線が存在しその間の相互作用はないと考えてもよさそうだ．これが 10MHz となると $R, \omega L$ の大小関係が逆転し，また $1/\omega C$ も小さくなってその存在を無視できなくなる．

AC 電源を供給するケーブルと実験で信号を送るために使うケーブルをおなじ構造のケーブルで兼用することはできないことが，理解できると思う．

ある程度高周波になると図 6.7(b) の抵抗は無視してもよい．図 6.7(b) の単位の長さを Δx とする．すると左側の電圧を v とすれば右側の電圧は

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x,$$

である．また左側から入った電流を i とすればこれが右側からでるときは

$$i + \frac{\partial i}{\partial x} \Delta x,$$

となる．電圧降下は単位長さあたりのインダクタンス $L/\Delta x$ によるものであって

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{L}{\Delta x} \frac{\partial i}{\partial t}, \tag{6.19}$$

また電流降下は単位長さあたりのキャパシタンス $C/\Delta x$ によるものであって

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{C}{\Delta x} \frac{\partial v}{\partial t}, \tag{6.20}$$

である．これらふたつの式から

$$\frac{\Delta x^2}{LC} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\Delta x^2}{LC} \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 i}{\partial t^2},$$

を導くことができる (試みていただきたい)．この 2 式はともに

$$u = \frac{\Delta x}{(LC)^{1/2}}, \tag{6.21}$$

とおけば

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \tag{6.22}$$

のかたちになる．これは 1 次元の波動方程式で，波動の位相速度が u である．式 (6.21) において L, C として単位長さ (MKS 単位系では 1m) あたりの値をとれば,

$$T_d = (LC)^{1/2}, \tag{6.23}$$

は信号が単位長さを伝わるために必要な時間を示す．これを**遅延時間**という．

この式の解は

$$v = f_1(x - ut) + f_2(x + ut), \tag{6.24}$$

である．f_1, f_2 は互いに逆方向に進む波をあらわす．これを用いると，電流は

$$i = \frac{1}{Z_0}[f_1(x - ut) + f_2(x + ut)], \tag{6.25}$$

ただし

$$Z_0 = \left(\frac{L}{C}\right)^{1/2}, \tag{6.26}$$

である．この Z_0 を伝送線路の特性インピーダンスという．f_1 については $v/i = Z_0$,f_2 については $v/i = -Z_0$ である．

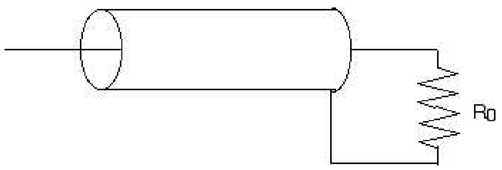


図 6.8: 伝送線路の終端処理.

伝送線路は均一につくられているので，一端に信号を加えれば途中で信号が反射することはない．しかし他端に達するとそこで反射することがある．図 6.8 のように終端に抵抗 R_0 があるときを考えよう．現実にはこれは終端につながれた機器の入力インピーダンスである．さて信号が右端にあらわれたときの電圧を v_0^+，これが反射して左に伝わっていくとき v_0^- になるものとする．これらの電圧による電流は

$$i_0^+ = v_0^+/Z_0, \quad i_0^- = -v_0^-/Z_0,$$

である．R_0 においては

$$\frac{v_0^+ + v_0^-}{i_0^+ + i_0^-} = R_0,$$

でなければならない．これを書き換えると

$$k = \frac{v_0^-}{v_0^+} = \frac{R_0 - Z_0}{R_0 + Z_0}, \tag{6.27}$$

を得る．k を反射係数という．

特殊な場合として

$R_0 = Z_0$ のとき $k = 0$.

$R_0 = 0$ (終端が陥落) のとき $k = -1$.

$R_0 = \infty$ (終端が解放) のとき $k = 1$.

である．これは記憶しておく価値がある．

問題

1. 時刻 $t = 0$ において図 6.9 のスイッチを閉じるとする．このときから流れ始める電流を $i(t)$ とすれば,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E, \tag{6.28}$$

である．この方程式の解は，右辺をゼロとおいた斉次方程式 $L\frac{di}{dt} + Ri = 0$ の解 (余関数あるいは補関数) に，式 (6.28) の特解を加えたものである．

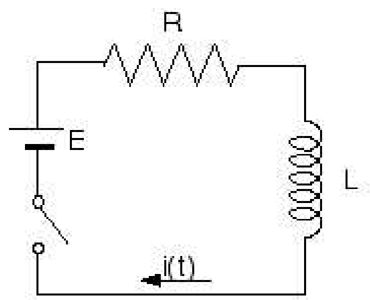


図 6.9: LR 回路.

(1) $i_1 = E/R$ は特解であることを示せ.

(2) 補関数として $i_0(t) = i\exp(-t/\tau)$ を仮定し，τ を求めよ.

(3) τ の次元は何か．τ をなんと呼ぶか.

(4) 特解と補関数の和である $i(t) = i_0(t) + i_1$ を求め，初期条件 $i(0) = 0$ を用いて i を求め，さらに得られた時間変化を図示せよ.

2. (1) 図 6.10 の回路を**ブリッジ**という．E は電圧源 (一般には交流電圧源)，A は電流計，$Z_1 - Z_4$ はここに配置された素子のインピーダンスである．a 点と b 点の電圧が等しいとき (電流計の指示がゼロのとき) $Z_1Z_3 = Z_2Z_4$ であることを示せ．(ab 間を解放したと仮定し，それぞれ $Z_1 \cdot Z_2$ および $Z_4 \cdot Z_3$ を流れる電流を仮定して，a 点と b 点の電圧が等しいとおく．)

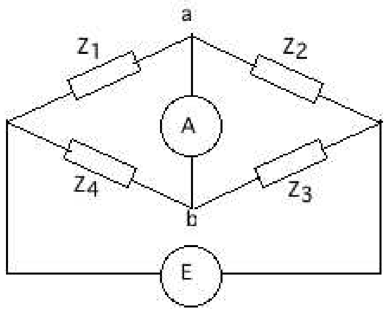


図 6.10: ブリッジ回路.

(2) この回路を用いて，未知の抵抗 R_x およびインダクタンス L_x を求めることができる．図 6.11 において，R_1 および R_4 は既知の抵抗，L_2 は可変インダクタンス，R_2 は可変抵抗である．電流計がゼロになるように L_2 と R_2 を調整し，このときの L_2 と R_2 の値を L_{20}, R_{20} とおく．R_1, R_4, R_{20} , L_{20} から R_x と L_x を求める式を導け．(電源の角周波数 ω を仮定し，(1) で求めた式の左右両辺の実数部と虚数部をそれぞれ等しいとおく．)

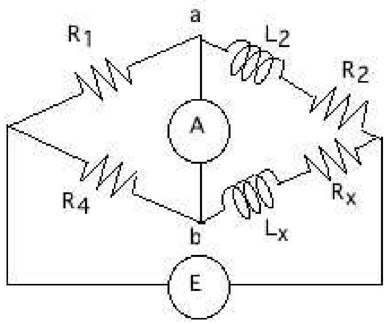


図 6.11: ブリッジ回路による測定.

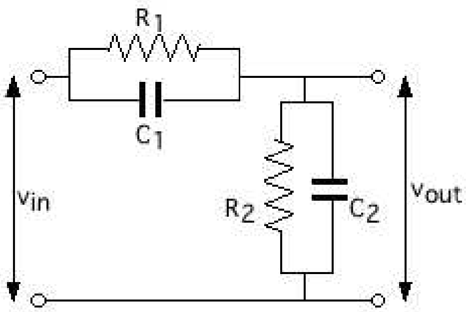


図 6.12: 減衰器.

3. 図 6.12 の回路はオシロスコープのプローブなどに使われている**減衰器**である．減衰比 v_{out}/v_{in} が周波数 ω にかかわらず一定となる条件を求めよ．

参考書

1. 飯島健一，中西邦雄「電気回路 I」オーム社 (1962); 関口　忠「電気回路 II」オーム社 (1963).

2. 波動方程式の解法は，たとえば，高橋健人「物理数学」培風館 (1958).

第7章　フィードバックによる安定化

7.1　演算増幅器

演算増幅器 operational amplifier **通称 OP (オペ) アンプ**は振幅 ±10 ボルト程度の小信号の増幅・微分・積分・信号発生などになくてはならないものである．

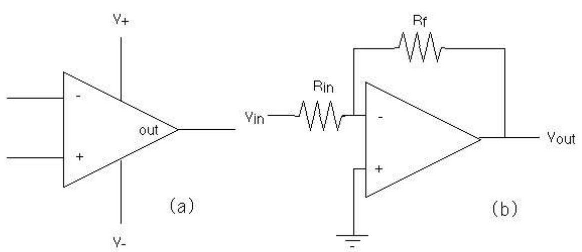


図 7.1: 演算増幅器 (a) とその反転増幅器としての使用 (b).

回路図では演算増幅器は図 7.1(a) のようにあらわされる．$+V$ と $-V$ は電源の電圧である．+ 入力と - 入力の差がその演算増幅器に固有の増幅度で増幅されて出力 (三角の右側の頂点) に現れる．はだかの演算増幅器はいわゆる差動増幅器である．この図のほかに，位相補償用のピン，オフセット調整用のピンなどがあるのがふつうだが，これらについては説明を省略する．

理想的な演算増幅器は，1) 増幅度が無限大，2) 入力インピーダンスが無限大，3) 出力インピーダンスがゼロ，4) 帯域が直流から無限大まであるものとされている．入出力インピーダンスについて厳密に定義するのは容易ではない．しかし実際は以下の事実を心得ていれば十分である．それは,「出力インピーダンス Z_o の信号源に入力インピーダンス Z_i の演算増幅器をつなげば，演算増幅器が受け取る信号の振幅は信号源が解放されているときの $Z_i/(Z_i+Z_o)$ 倍になる」ということである．もしここでいう信号源がやはり演算増幅器の出力であって，その出力インピーダンスがゼロであったとすれば，$Z_i/(Z_i+Z_o)=1$ である．ゼロではないとしても $Z_i >> Z_o$ であれば，$Z_i/(Z_i+Z_o)=1$ は成り立つと考えてよい．

増幅度が無限大というのもわかりにくい．もし増幅度が無限大であるとして，図のような演算増幅器の正負の入力に実際に信号を入れたらどうなるであろうか．この差の無限大倍が出力に出るはずだが，実際は出力は電源電圧を超えることはできない．$V_{+in} > V_{-in}$ であれば $V_{out} \sim +V$，$V_{+in} < V_{-in}$ であれば $V_{out} \sim -V$ となる．$+V$,$-V$ が 2 値論理のふたつの変数に対応するものとかんがえれば，これは大小関係を 2 値化する回路とみなすことができる．この回路を**比較器 comparator** という．実際ははじめから比較器として作られた専用の集積回路があるので，汎用の演算増幅器を比較器として使うことはあまりない，

演算増幅器のもっとも一般的な使い方は 図 7.1(b) の反転増幅器である．出力 V_{out} が入力のひとつマイナス (-) 入力とインピーダンス (図では抵抗 R_f) を介してつながっていること，すなわち出力信号を入力に返して (帰して，帰還して，フィードバックして) いることが特徴である．演算増幅器と帰還インピーダンスはフィードバックループを作っている．

ここで演算増幅器の入力ピンでは正・負の入力電圧が等しいということ (このことを「仮想的にショートされている」という) を了承してほしい．なぜそうなるかを理解するには演算増幅器の中身に踏み込まなければならない．はだかの理想演算増幅器は正負の入力の差を無限大倍して出力した．だから,「演算増幅器の増幅度が無限大なので，意味のある出力を得るためには正負の入力差がゼロでなければならない」と考えておいていただきたい．

図のように入力に抵抗 R_{in} を介して電圧 V_{in} を接続したとしよう．正入力がアースされている，すなわち 0V とされているので，負入力も 0V となる．電流 $I = V_{in}/R_{in}$ が流れるとしたら，その行き先はふたつありそうだ．ひとつは正入力端子を介して演算増幅器の内部に流れ込むこと，もうひとつは R_f を介して出力端子へ行くことである．しかし理想演算増幅器の入力インピーダンスは無限大であるから，この電流は第 2 のルートしか流れることができない．電流は $V_{in}/R_{in} = -V_{out}/R_f$ となる．V_{out} に現れる電圧は負入力端子の電圧 0V からさらに iR_f だけ下がる．すなわち

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_f}{R_{in}}, \tag{7.1}$$

である．このように R_f/R_{in} は増幅度の絶対値であ

る．たとえば信号を 10 倍に増幅したければ R_f/R_{in} を 10 とすればよい．

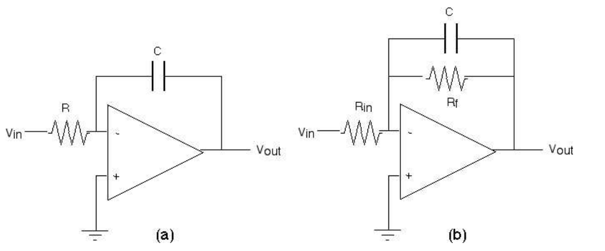


図 7.2: (a) 積分器．(b) 実際に使用される積分器の回路．

式 (7.2) において抵抗 R をインピーダンス Z と書き換えて

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{Z_f}{Z_{in}}, \tag{7.2}$$

のように一般化することができる．ここで 図 7.2 のように負入力と出力の間にコンデンサ C を入れれば，このインピーダンスは $1/j\omega C$ であるから，

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{1}{j\omega RC} = -\frac{1}{j\omega\tau}, \tag{7.3}$$

となる．$\tau = RC$ は時定数である．この式は入力の積分が出力に現れることを示している．従って 図 7.2 の回路を積分器，積分回路 integrater という．

電気回路の章で述べた抵抗とコンデンサで作った (受動部品だけで作った) 積分回路は低周波数領域では積分特性を持たなかった．式 (7.4) でみると，演算増幅器の積分器は理想的な積分器のように見える．しかし実際はそうはいかない．周波数が低くなるほど積分器の出力は大きくなるのだが，出力電圧は電源電圧より大きくなることはできない．従ってこの積分器のボーデ線図はやはり 図 6.4 のようなものになる．実際に用いられる積分器は 図 7.2(b) のようなものである．これは

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = -\frac{R_f}{R_{in}}\frac{1}{1+j\omega R_f C}, \tag{7.4}$$

という 1 次おくれ特性を持ち，振幅は R_f/R_{in} で調節できる．積分器ができるのだから微分器もでる．しかし微分器は積分器ほど簡単ではないので参考書にゆずる．

図 7.3 は**加算器 (足し算器)** である．この出力電圧は

$$V_o = -R_f\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}\right),$$

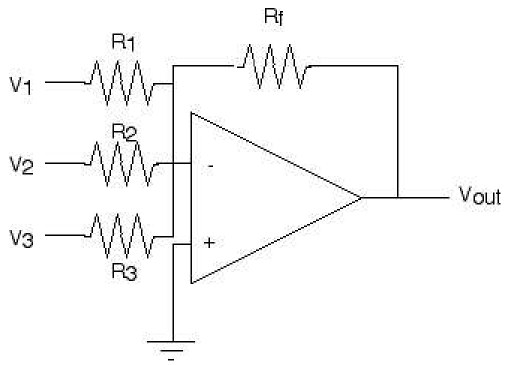


図 7.3: 加算器．

である．$R_1 = R_2 = R_3 = R$ とすれば $V_O = R_f(V_1 + V_2 + V_3)/R$ であって出力電圧は入力電圧の和に比例する．R_1, R_2, R_3 の値を変えれば，重み付きの足し算が可能である．なお非反転入力 (+ピン) を使えば引き算も可能である．

7.2 自動制御理論のためのブロック図

ここで話題を転換して，**自動制御理論**について説明する．この理論はシステムの出力を設定値すなわち思った値に近づける方法を示す理論である．アナログ回路は，素子の性能のばらつきや，外部雑音のため，思ったような出力を得るのはむずかしい．演算増幅器のつかいかたは自動制御理論のひとつの応用である．

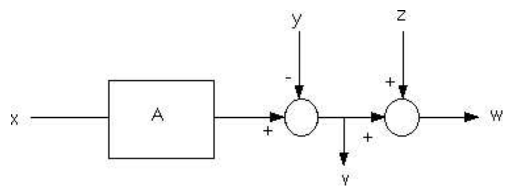


図 7.4: ブロック図．

自動制御理論では**ブロック図 (ブロックダイアグラム)** を用いる．この図では矢印で信号の流れの方向を，四角いブロックで信号に加える演算を示す．図 7.4 では x という変数に A という演算を与えるので，ブロックの出力は Ax となっている．また丸印で信号の合流を示す．このとき + あるいは − を併記する．図の例では最初の丸印の出口では信号は $Ax - y$ となる．2 番目の丸印の出口では $w = (Ax-y)+z$ である．ふたつの丸印の間にあるのは引き出し点と称するもので，ここから引き出した信号は $v = Ax - y$ である．

四角いブロックで演算を表すために，ふつうはここ

に伝達関数，すなわち演算のラプラス変換を書く．本書ではラプラス変換を解説する余裕がないので，フーリエ変換を書くことにする．すなわち入力を微分するときにはブロックに $j\omega$ と記入し，入力を積分するときにはブロックに $1/j\omega$ と記入する．もちろん，微分積分が $j\omega$ の乗除で表せるのは信号が正弦波のときに限る．本書ではすべての定常的な信号は正弦波に分解できるという立場に立っている．過渡的な信号，すなわちステップ上に立ち上がる信号とか，インパルス的な信号 (ディラックのデルタ関数のようなパルス信号) をも扱うにはラプラス変換を導入する必要がある．

例えばはじめに (初期値として) x_0 の水量を持つ水槽へ，注入速度 $u(t)$ で水を注ぐ操作をブロック図化すれば，図 7.5 のようになる．

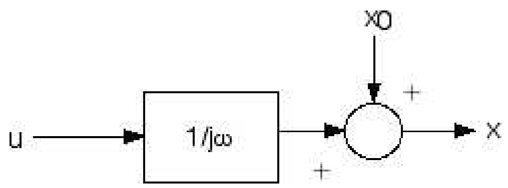


図 7.5: 水槽に水を貯めるという操作のブロック図．

7.3 フィードバック制御

図 7.6 は水槽の水量を常に一定に保つために行う制御である．水洗便所のタンクなどを思い浮かべていただきたい．x は水量で，その目標値は x_0 である．目標値と実際の水量の差 $x_0 - x$ に演算 A をほどこした結果水量 u を供給する．タンクの水量は使えば減少するが，ここでは $-v$ が入るように描いてある．この量は計測しないことにする．演算 A としては，とりあえず定数 A を掛けることにしておこう．

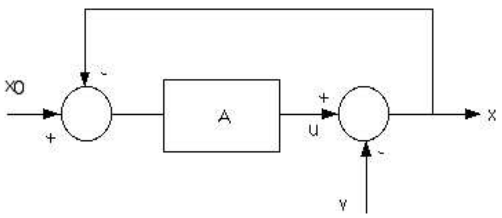


図 7.6: 水槽の水量を一定に保つための制御．

ブロック図が示すように，u と v の差が x だから，$u - v = x$，また $u = A(x_0 - x)$ である．これから u を消去して

$$x = \frac{A}{1+A}x_0 - \frac{v}{1+A},$$

を得る．ここで $A >> 1$ とすれば右辺第 1 項の係数は 1，第 2 項の係数は 0 となり

$$x = x_0,$$

とすることができる．

ここでは現実の x の量から操作量を決めている．このように制御したい量の現在値を操作に反映させる方法を**フィードバック制御 (帰還制御)** という．またブロック図は閉じたループをなしているので，閉ループ制御ともいう．フィードバック制御を使わずに同じことをしようとしたらどうすればいいだろうか．v を測定して

$$u = v,$$

とするのが最も簡単な方法であろう．このとき，v の測定量に誤差があったらどうだろうか．誤差がきわめて微少だったとしても，何時間も経った後では誤差が累積し，水槽があふれたり，からになったりする事態におちいる．v の測定が正確であったとしても，水が蒸発したり，小さな穴から漏れることもあり得る．このとき $u = v$ とする制御法では水位は間違いなく減少する．フィードバック制御では予期せぬ水の減少は v がふえたことと等価である．もともとフィードバック制御では水量は計ってはいないので，予期せぬ水の減少は (増加でも同じことであるが) 制御の結果に影響しない．フィードバック制御は誤差，あるいは外乱に左右されにくい制御法である．

前に述べた反転増幅器は入力と出力が抵抗やコンデンサを介してつながっていた．この反転増幅器は出力の一部を入力にフィードバックしていると考えれば，図 7.7 のブロック図で表すことができる．フィードバック量を β とし，

$$(V_{in+} - V_{in-} - \beta V_{out})A = V_{out},$$

を V_{out} について解くと

$$\frac{V_{out}}{V_{in+} - V_{in-}} = \frac{A}{1+\beta A},$$

である．図 7.1(b) では $V_{in+} = 0, V_{in-} = V_{in}$ であったので，$V_{out}/V_{in} = -A/(1+\beta A)$，となる．ここでゲイン無限大すなわち $A \to \infty$ とすれば，$V_{out}/V_{in} = -1/\beta$，である．$\beta$ を帰還率 feed back ratio という．図 7.1(b) の回路では，$\beta = R_{in}/R_f$ である．

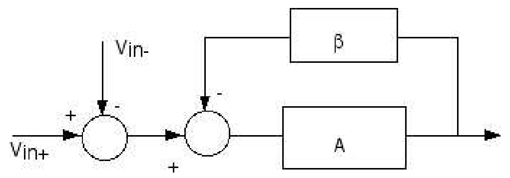


図 7.7: フィードバックの観点からの反転増幅器.

7.4 フィードバックの安定性

x_0 という入力が $G(\omega)$ という操作をほどこされた結果 x という出力になる，すなわち $x = G(\omega)x_0$ であるとしよう．この系で x_0 が有限であるかぎり x が有限の値をとるとき，この系は安定であるといい，そうでないときを不安定であるという．不安定な場合は x が単調に増加または減少して $\pm\infty$ になる場合もあるし，正負に振動しこの振動が次第に成長して $\pm\infty$ に至る場合もある．実際の回路などでは電源の制限があるので $\pm\infty$ に至ることはないが，この場合も (場合によっては) 不安定とみなすことにする．

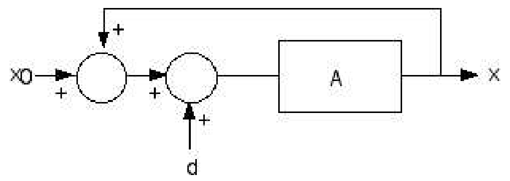


図 7.8: 正フィードバック.

$G(\omega)$ が負フィードバックループをふくむ場合，たとえば 図 7.6 の場合は $G = A/(1+A)$ で，このシステムは安定である．図 7.8 はフィードバックを正で返している．このとき $G = A/(1-A)$ で，$A > 1$ なら系は不安定である．時間を細分化し，時刻 t_n における出力を x_n と書こう．すると $x_n = Ax_{n-1} + Ax_0$ のように，A を公比とする等比級数が現れる．$A > 1$ であれば $x \to \pm\infty, (n \to \infty)$ となる．外乱 d が存在すれば，たとえ $x_0 = x(0) = 0$ であっても $x \to \infty$ となる．このように正フィードバックは系を不安定にする．

周波数特性を考慮に入れると，負フィードバックのつもりでも正フィードバックになっている場合がある．このようなフィードバックの安定性は制御理論の中心課題である．この問題を厳密に論じるには複素関数論の知識が必要であるが，ここでは直感的な理解を得るためにおおざっぱな説明をする．

図 7.9 の内側の図はすでに説明した 1 次遅れ要素を直線で近似したものである．この線図は対数プロット

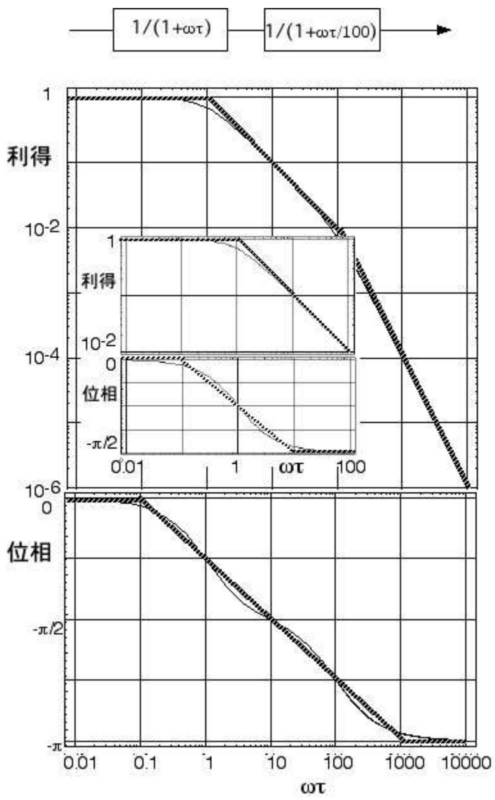


図 7.9: 内側の図は 1 次おくれ要素の直線近似．外側の図は，それぞれ τ と $\tau/100$ を時定数とする 1 次おくれ要素の 2 段従続接続．利得は $\omega\tau = 1, 100$ の 2 点で，位相は $\omega\tau = 0.1, 1000$ の 2 点で折れ曲がる．

であるから，従続接続した場合は線図上では和を作ればよい． 図 7.9 は，それぞれ τ と $\tau/100$ を時定数とする 1 次遅れ要素を 2 段従続に接続した系のボーデ線図である．利得の直線はたてよこ比を 1 にとれば，低周波領域の水平線が，まず 45^0 で，さらに 67.5^0 で右下がりになる．位相は -90^0+-90^0=-180^0 まで下がる．このような 1 次遅れ要素を 3 段 (以上) 従続接続すると，高周波領域では位相が必ず -270^0 (以上) 減少する．位相が -180^0 以上変わると，負帰還したつもりが正帰還になる．もっと詳しくいえば，単一周波数の信号を考えると，(負帰還のために) 信号を負にするということは，位相を 180^0 ずらすことである．この信号の位相がさらに 1 次遅れ要素の 2 段以上の従続接続のために 180^0 ずれると，もとの信号と同じになってしまう $(\sin(x+\pi) = -\sin(x), \cos(x+\pi) = -\cos(x)$ であるから...)．このために負フィードバックのつもりが正帰還となり，不安定になる．

1 次遅れ要素 (回路) を従続に接続したからこのような事態に至ったのであるが，では 1 次遅れ要素を使わなくてすむかというと，そうはいかない．制御は

必ず何らかの時間遅れを伴う．信号の伝播は光の速度以上ではいかない．制御ループに回路を挿入すれば，等価回路的にコンデンサーと見なせる部分が挿入されることとなり，さらに遅れが入る．多くの自動制御のように電気量を力学量に変換する部分があると電気信号だけの場合に比べてはるかに大きな遅れが入る．一般にこのような遅れ要素のひとつひとつを遅れ時間 τ を用い，1 次遅れ要素 $1/(1+j\omega\tau)$ で近似する．

正フィードバックが不安定となるのは，位相が 180^0 ずれる領域で利得 A (オープンループゲインという) が 1 よりも大きい場合であった．逆に言えば，位相が 180^0 ずれる領域での A を 1 以下にすれば安定である (1 以下にしなければ不安定である)．しかし，A が小さいと設定値と現実の値との誤差が生じ，また設定値に落ち着くまでに時間がかかる (多くの場合時間がかかることの方が問題になる)．こうした問題をどう解決するかが制御技術者の腕の見せ所である．

問題

1. 図 7.6 において $v=0$ とする．設定値 x_0 の 95% 以内に x の値を納めるために必要なゲイン A の範囲を求めよ．

2. 図のように台車に棒を取り付ける．台車が静止した状態では棒は倒れてしまうが，台車を適当に動かすと棒をたてたままの状態で保持することができる．すなわち，本来不安定な倒立振子をフィードバックによって安定化できる．

   $I=m\ell^2/3$ を棒の慣性モーメント，H, V をそれぞれ台車に棒が取り付けられている支点に働く力の x, y 成分とする．f を安定化のために与える外力とすれば，この系は次の方程式群で記述できる．

$$
\begin{aligned}
I\frac{d^2\psi}{dt^2} &= V\ell\sin\psi - H\ell\cos\psi, \\
m\frac{d^2\ell\cos\psi}{dt^2} &= -mg+V, \\
m\frac{d^2}{dt^2}(x+\ell\sin\psi) &= H, \\
M\frac{d^2x}{dt^2} &= f-H, \qquad (7.5)
\end{aligned}
$$

   (1)ψ が小さいものとして $\sin\psi=\psi, \cos\psi=1$ と近似し，これらの式から H, V を消去せよ．

   (2) さらに x を消去し，f を与えたときの ψ の変化を示す式を導け．

   (3) 棒が倒れそうになるという現象を外乱 $\Delta\psi$ がはいることと等価とし，この系の運動をブロック図であらわせ．

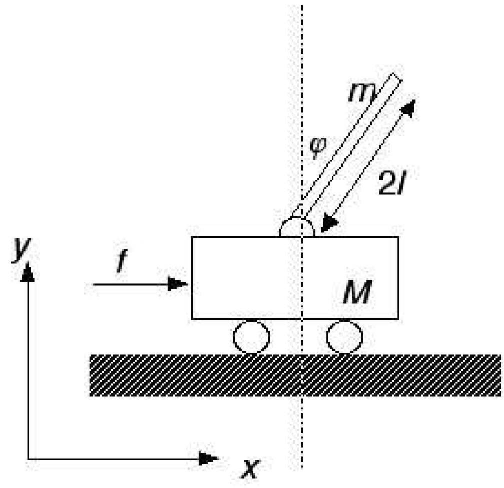


図 7.10: 倒立振子.

参考書

1. 岡村廸夫「定本ＯＰアンプ回路の設計 - 再現性を重視した設計の基礎から応用まで -」CQ 出版社 (1990).
2. 堀　洋一，大西公平「制御工学の基礎」丸善 (1997).

第8章　ディジタル回路と計算機

8.1　2 進法とブール代数，組み合わせ回路

電気信号の振幅がふたつしかないものとし，ひたすらある時刻に信号がどちらのレベルにあるかを情報操作に応用するのが**ディジタル**回路とディジタル計算機である．自然界に存在する量はすべて**アナログ**であるが，われわれがこれを扱うには数値化，すなわちディジタル化せざるを得ない．もっとも簡単なディジタル化は「あるか・ないか」すなわち 1 か・0 かである．計算機もこのふたつの字を用いる．これが 2 進法で，お馴染みの 10 進法の 10 が 2 にかわったものである．2 進法では任意の数 y を

$$y = 2^n x_n + 2^{n-1} x_{n-1} + \cdots + 2x_1 + x_0, \qquad (8.1)$$

とあらわす．$x_i = 1, (i = 1, 2, \cdots, n)$　または 0 である．y をあらわすのに，単に 1 , 0 を横に並べて

$$y = (x_n x_{n-1} \cdots x_1, x_0),$$

と書く．

2 進数の桁数を**ビット**という．8 ビットの 2 進整数の最大値は (11111111) で 10 進数では 255 である．

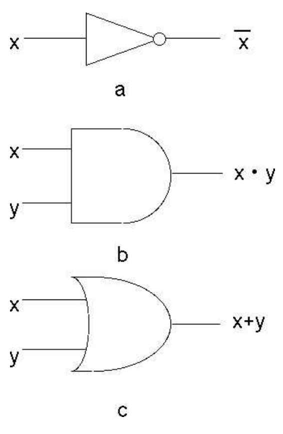


図 8.1: プール代数の演算．否定 (a), 論理積 (b), 論理和 (c).

0 と 1 の演算のための数学が**ブール代数**である．ブール代数には 3 つの演算がある．否定・論理積・論理和である．このうち否定は単項演算，論理積・論理和は多項演算である．これらを 図 8.1 のような論理記号で表す．これらを実行する回路を論理回路という．論理回路に対応する電子回路素子が数多く市販されており，ディジタル回路の回路図にはこれらの記号がそのまま使われている．

表 8.1: NOT 回路の真理表.

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

表 8.2: AND 回路の真理表.

x	y	$x \cdot y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

表 8.3: OR 回路の真理表.

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

表 8.1-8.3 のように，入力と出力を対応させた表を**真理表**という．否定・論理積・論理和を実行する回路をそれぞれ NOT 回路，AND 回路，OR 回路というが，その由来は明らかであろう．またゲート gate という言葉を使い，AND 回路・OR 回路を AND ゲート・OR ゲートということもある．

計算機は 2 進法で加減乗除の 4 則演算を行っているが，ここでは加算回路だけをとりあげる．2 進法のいちばん下の位の加算の真理表を 表 8.4 に示した．1 桁のふたつの 2 進数の加算は 2 桁の 2 進数になる可能性がある．この 2 桁の上の位が $carry$ (桁上がりの意味) 下の位が sum である．これを回路化した 2 入力 2 出力の回路を半加算器という．2 進法で下から 2 桁目以上で，同じ桁どうしを加算するときは，下からの桁上がりも考慮するので， 3 入力 2 出力の回路となる．この 3 入力 2 出力回路を全加算器という．

表 8.4: 半加算回路の真理表.

x	y	$carry$	sum
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

表 8.5: EXCLUSIVE OR 回路の真理表.

x	y	sum
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

表 8.4 から入力を x, y, 出力を sum とする部分を抜き出したものが 表 8.5 である．このような演算を排他的論理和，これを実現する回路を EXCLUSIVE OR 回路という．

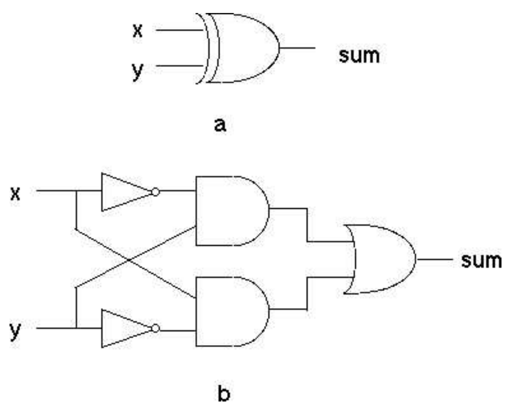


図 8.2: EXCLUSIVE OR 回路の論理記号 (a) とその NOT, AND, OR 回路による実現 (b).

EXCLUSIVE OR 回路は 図 8.2(a) の論理記号で表す．この回路は NOT, AND, OR の 3 つの回路を組み合わせて， 図 8.2(b) のように実現できる．この EXCLUSIVE OR 回路 と AND 回路を 図 8.3 のように組み合わせると半加算器となる．さらに半加算器 2 つと OR 回路を組み合わせると全加算器になるのだが，詳細は省略する．

原子核・放射線・素粒子関係の実験ではコインシデンス回路と称するものを使用する．これはふたつの入力に同時にパルスが入ったときにパルスを出力するもので，その実体は AND 回路にほかならない．

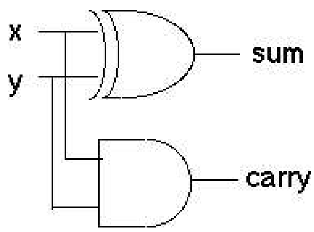


図 8.3: 半加算器.

8.2　順序回路

論理回路には今まで述べてきた**組み合わせ回路**と，ここで述べる**順序回路**とがある．順序回路は出力が入力だけでなく過去の状態にも依存する．組み合わせ回路は静的，順序回路は動的といってもよい．順序回路には特定の信号 (クロックパルスあるいは単に**クロック**という) と同期して動作する**同期回路**と，そうでない**非同期回路**とがある．同期回路を**オートマトン automaton(複数は automata)** ともいう．

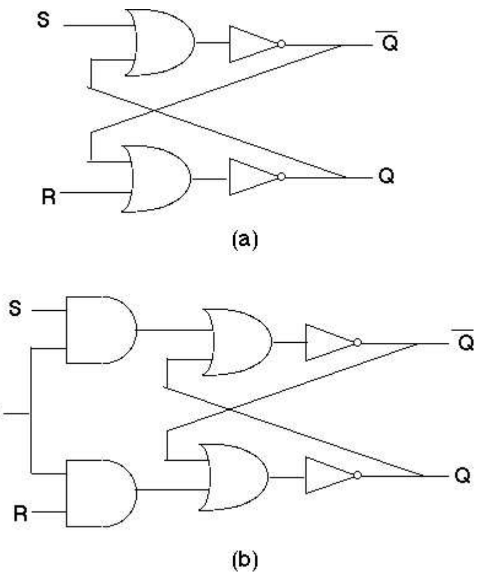


図 8.4: (a) 非同期型 SR フリップフロップ，(b) 同期型 SR フリップフロップ.

もっとも基本的な順序回路は**フリップフロップ**である．図 8.4(a) の回路で S 入力を 1，R 入力を 0 とするとしよう．上の OR 回路の出力は 1，後ろの NOT 回路の出力 $\overline{\mathrm{Q}}$ は 0 である．下の OR 回路の出力は (入力がふたつとも 0 だから) 0， 後ろの NOT 回路の出力 Q は 1 となる．この Q=1, $\overline{\mathrm{Q}} = 0$ という状態は S が 0 に変わっても，R=1 であるかぎり変わらない．言い換えれば，この回路は記憶能力があるということになる．

フリップフロップはシーソーのことで，一方が上がると (1 になると) 他方が下がる (0 になる) という状態変化の類似から回路の名前となったのであろう．図 8.4(a) は SR フリップフロップとよばれるもので，S は set すなわち Q を 1 にセットすること，R は reset すなわち Q を 0 にリセットすることを意味している．$\overline{\mathrm{Q}}$ にはつねに Q の否定が現れる．

この回路のふたつの入力に 図 8.4(b) のようにふたつの AND 回路を追加し，これらに共通にクロックパルス C を入れれば，状態変化は C が 1 の状態でのみ可能となる．出力はクロックに同期する．

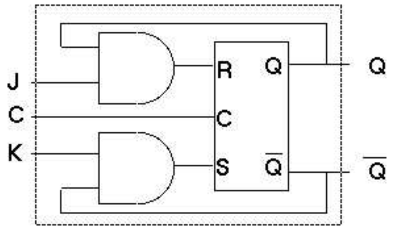


図 8.5: JK フリップフロップ.

SR フリップフロップでは S=R=1 のときの $\overline{\mathrm{Q}}$ は Q の否定とならない．このため入力 S=R=1 は禁止されている．これは実用上不便なので， S=R=1 のとき出力を反転させる JK フリップフロップが好んで使われる．図 8.4(a) の SR フリップフロップをひとつのはこであらわす．これに 図 8.5 のようにふたつの AND 回路を付け加えて結線し，あらためて入力端子を J,C,K としたものが JK フリップフロップである．

入出力表はフリップフロップの特性を表す表である．表 8.6-8.7 にふたつのフリップフロップの入出力表を示す．これらの表で X は状態が変わらないこと，$\overline{\mathrm{X}}$ は状態が反転すること，すなわち 1 (あるいは 0) から 0 (1) へと変わることを示す．

表 8.6: SR フリップフロップの入出力表.

S	R	Q	$\overline{\mathrm{Q}}$
0	0	X	$\overline{\mathrm{X}}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	?	?

フリップフロップにはこのほか D フリップフロップと T フリップフロップがある．これらはどちらも図 8.6 のように JK フリップフロップからつくる．

表 8.8-8.9 にふたつのフリップフロップの入出力表を示す．D フリップフロップでは入力がクロックとともに出力に現れ，次のクロックまで保持される．D は delay のことで，入力を遅延するという意味である．

表 8.7: JK フリップフロップの入出力表.

J	K	Q	$\overline{\mathrm{Q}}$
0	0	X	$\overline{\mathrm{X}}$
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	$\overline{\mathrm{X}}$	X

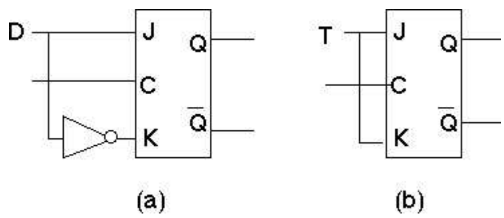


図 8.6: (a) D フリップフロップ, (b) T フリップフロップ.

表 8.8: D フリップフロップの入出力表.

D	Q	$\overline{\mathrm{Q}}$
0	0	1
1	1	0

T フリップフロップでは入力が入るたびに出力が反転する．はじめに Q が 0 であったとすれば，入力が偶数回であれば 0，奇数回なら 1 の出力を得る．このため T フリップフロップを奇偶カウンターともいう．

T フリップフロップを接続すると**カウンター**になる．図 8.7 において出力 Q_0 はクロック C が偶数回入れば 0，奇数回なら 1 となる．これをうける次段の出力 Q_1 は C が 2 回入るごとに反転し，同様に Q_2 は C が 4 回入るごとに反転する．この回路は全体でクロックのパルス数を 4 ビットの 2 進数に変換しているのである．原子核・放射線・素粒子関係の実験では**スケーラー**と称する，パルスを数える回路を使用する．このスケーラーにはもっとビット数の大きいカウンターが使われている．なお D リップフロップからはラッチ，シフトレジスター，メモリー等を構成することができるが，詳細は省略する．

矩形波を連続して発生するものを**非安定マルチ・バイブレーター**といい，なにか刺激があるとひとつだけ矩形波を発生するものを**単安定マルチ・バイブレーター**という．これらはディジタル回路というより，パルス回路という方が適当だが，ついでにここで紹介す

表 8.9: T フリップフロップの入出力表.

T	Q	$\overline{\mathrm{Q}}$
0	X	$\overline{\mathrm{X}}$
1	$\overline{\mathrm{X}}$	X

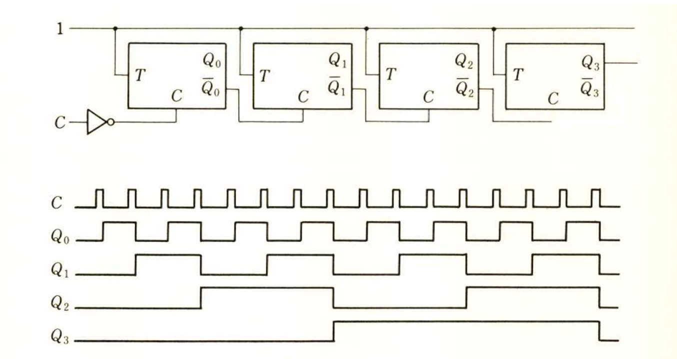


図 8.7: 4 ビットカウンター.

る．なおフリップフロップを双安定マルチ・バイブレーターということがある．

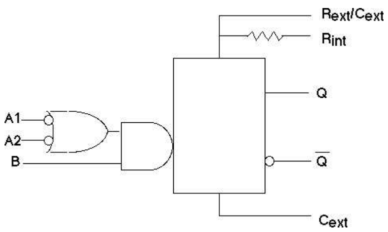


図 8.8: 単安定マルチ・バイブレーターの例.

単安定マルチ・バイブレーターにはいろいろな IC があるが，図 8.8 にその一例を示した．正論理入力は入力パルスの立ち上がりで動作し，負論理入力は入力パルスの立ち下がりで動作することを示す．出力パルスの幅は抵抗とコンデンサのそれぞれの値の積に比例する．IC には抵抗とコンデンサが内蔵されているが，長いパルス幅を得るためには指定された端子にこれらを外付けしなければならない．ふたつの出力端子からは正負相補的な出力が得られる．

実験ではあらかじめ定められた順序・定められた時間間隔で装置・機器を動作させる必要が生じることが多い．たとえば，(1) まずガスを真空容器に導入し，(2) ガスが空間的に所定の分布を作るまで待ち，(3) レーザーを入射する; という操作を仮定しよう．まずガスの入射装置にパルスで指令を送る必要がある．つぎにレーザーにパルスで指令を送るのであるが，このふたつのパルスのあいだにはあらかじめ決められた遅れ時間が必要である．この遅れ時間は単安定マルチ・バイブレーターで作ることができる．またふたつのパルスのパルス幅はそれぞれ指定されたものでなければならない．このためにも単安定マルチ・バイブレーターをつかうことができる．なおこのように順序立てて装置・機器を制御することを**シーケンス制御**という．

8.3 AD/DA 変換器

力学量，電圧・電流などの電気量，時間の長さなど自然界に存在する量は (量子力学などを持ち出すとややこしいことになるが，常識的には) 多くの場合アナログ量である．実験データ処理・自動制御・オートメーション・画像処理などの目的でこれを計算機に取り込むには，ディジタル量に変換する必要がある．また計算機で計算した結果を外界に作用させるにはアナログ量として出力しなければならない．われわれに身近な例では， CD プレイヤーがコンパクトディスクに記録されたディジタル量を音響というアナログ量に変換している．テレビの映像信号も近い将来ディジタル化されそうである．こうした相互変換を**アナログ・ディジタル変換 analog-to-digital conversion** および**ディジタル・アナログ変換 digital-to-analog conversion** という．これらの変換を行う回路を AD 変換器, DA 変換器 あるいは ADC, DAC とよぶが．後者は analog-to-digital converter, digital-to-analog converter の略である．

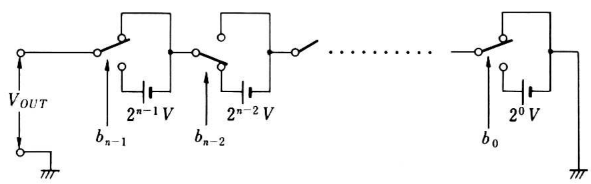


図 8.9: DA 変換器.

DA 変換器の原理を 図 8.9 に示す．ビット数に応じ 2^0V から 2^{n-1}V までの n 個の電源を用意する．これらをシリーズに接続するのだが，対応するビットが 0 であれば接続から外す．出力電圧は $b_i = 0$ または 1 に応じて，

$$V_{out} = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i,$$

となる．

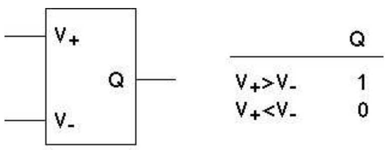


図 8.10: 比較器.

AD 変換器の要素は 図 8.10 の比較器 comparater である．この回路はふたつの入力の特定の大小関係に応じて 0,1 を出力する．1 ビットの AD 変換器といってもよい．この正体は利得 ∞ の差動増幅器である．理想的な差動増幅器であれば出力は $+\infty$ または $-\infty$ だが現実の差動増幅器ではこれが正負の電源となる．この電圧を論理回路の 1,0 に対応させればよい．

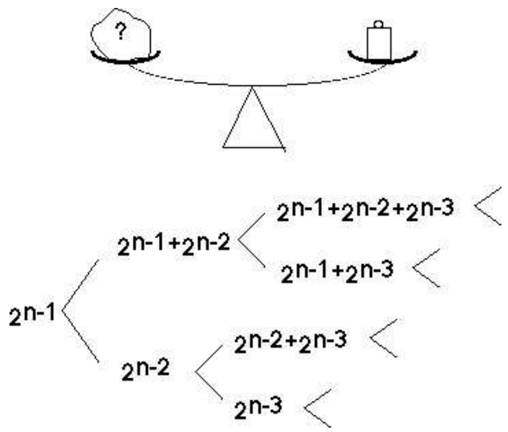


図 8.11: 逐次近似 AD 変換器の原理.

AD 変換にはいろいろなやり方があるが，もっとも変換速度が速いのは**逐次近似**式である．これは 図 8.11 のように天秤で未知の重さを量るのに似ている．ここで分銅は 2^0g から 2^{n-1}g のものまで n 個用意されている．秤量可能な範囲は 0 から 2^ng までである．まず 2^{n-1}g の分銅と比較する．物体の方が重ければ 2^{n-2}g の分銅を加える．反対に物体の方が軽ければ 2^{n-1}g の分銅をおろし， 2^{n-2}g の分銅単体と比較する．この手順を図のように繰り返す.

現実の回路を 図 8.11 に示す．まず RS フリップフロップが最大ビットを 1 とし，これを DA 変換する．これは 2^{n-1}g の分銅をのせることの対応する．天秤による秤量では実験者が大小を判断するが AD 変換器ではこれを 図 8.10 の比較器がおこなう．秤量では物体の方が軽ければ 2^{n-1}g の分銅をおろすが，AD 変換器では V_{IN} が小さければ左端の RS フリップフロップをリセットし $b_{n-1}=0$ とする．そうでなければリ

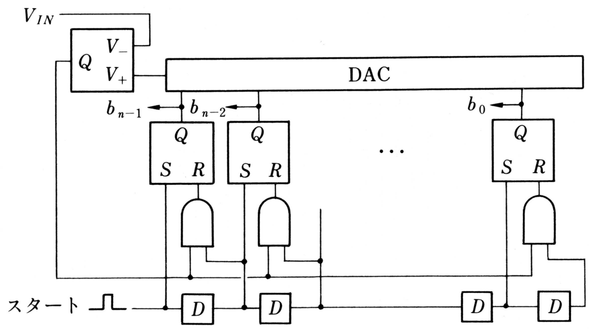


図 8.12: 逐次近似 AD 変換器.

セットしない．次に b_{n-2} を 1 としてまた比較する.... この手順をビット数と同じ回数繰り返す.

8.4 画像データの処理

四角の枠の中の画像を計算機に取り込むには，まずこの枠を画素に分割する．縦を n ビット，横を m ビットに分割すれば，画素数は 2^{m+n} である．モノクロームの画像では，この個々の画素の明度を白と黒を両端とする灰色で l ビットで表される階調 (グレースケール) のどれかにあてはめる．$l=8$ では 256 段階に分割することになる．$m=n=10$ では画素数は約 100 万となるので，$l=8$ のとき 1 枚の画像を表すには 1 メガバイトの記憶容量が必要である (8 ビットを 1 バイトという)．カラー画像では個々の画素を 3 原色 (ディスプレイでは赤・青・緑あるいは RGB，プリントするときは赤・青・黄) の組み合わせで表すので，必要な記憶容量は 3 倍となる．ディジタルカメラはこの画素数だけの受光素子を持っている.

8.5 情報理論

もともとはビットは**情報理論**における情報量の単位である．生起確立が $p(x)$ である事象 x が実際に生じたことを知ったときに得る**自己情報量**を，bit を単位として

$$I(x) = -\log_2 p(x), \tag{8.2}$$

により定義する．たとえば，8 月 6 日の天気が晴，雨，雪である確率をそれぞれ 0.4995，0.4995, 0.001 とする．実際に晴であったと分かったときに得る自己情報量は，$-\log_2 0.4995 = 1.001$bit である．雨と分かったときも同じだが，雪だと分かったときは $-\log_2 0.001 =$

9.965bit である．起こりえないことが起こったときに大きな自己情報量が得られる．自己情報量はニュースバリューを定量化するものと考えられる．

n 個の事象がそれぞれ確率 $p_1, p_2., ..., p_n$ で生起するとき

$$H(p_1, p_2., ..., p_n) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i, \quad (8.3)$$

を**エントロピー**あるいは**平均情報量**といい，事象が確定したとき時に得られる情報量の平均を意味する．単位はやはりビットである．

あるコインを投げた時に表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であれば，このコインを投げた時に得られる平均情報量 (エントロピー) は，$H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$ である．

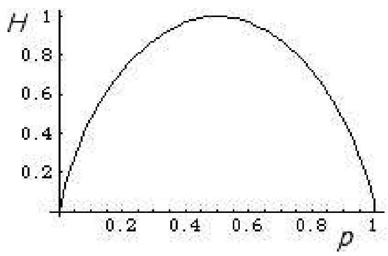


図 8.13: ふたつの事象のエントロピー．

図 8.13 が示すように $p = 0, p = 1$ では H はゼロである．言い換えると，コインを投げる前から表もしくは裏が出ることが確実に分かっているとしたら，得られる平均情報量がゼロである．H が最大になるのは $p = 1/2$ のときである．一般に全てが同確率のとき (もっともランダムな状態)，エントロピーが最大になる．

情報理論ではこのエントロピーを「事象の不確かさ」ととらえ，事象がおこったときの不確かさの減少分をその情報の「情報量」と考える．情報を受け取る前後の不確かさの相対値が「情報エントロピー」である．コインを投げる前に表が出るか裏がでるか全く分からなければ，不確かさすなわち「情報エントロピー」は最大である．「表 (裏) が出た」という「情報」を得ると「情報エントロピー」は最小値にまで減少する．

ここでは情報理論のほんの入り口を紹介した．この理論は信号伝送 (最近ではとくに動画などの大量の情報の伝送) の効率化や伝送時の誤り訂正，情報の保護，暗号などに応用されてきた．また脳の情報処理や，量子力学との融合による量子計算機の研究は現代科学の最前線である．

問題

1. 0-1V (ボルト) の範囲を n ビットの 2 進数に変換する AD 変換器がある．この AD 変換器の誤差は何ボルトか．n=8 および 12 のときは誤差は具体的に何ボルトになるか．

2. 周波数の上限を 1MHz とする信号をアナログ・ディジタル変換して計算機に取り込みたい．標本化周期 (サンプル周期) の上限は何秒か (5.5 節を参照のこと)．

3. 比較器・AND 回路・カウンター等を組み合わせて，3 チャネルのマルチチャネル波高分析器の回路図を書け．またできあがったマルチチャネル波高分析器は各チャネルがいくつまで数えられるかを述べよ．

参考書

1. 小方　厚，小柳義夫「教養のためのコンピュータ入門」近代科学社 (1988).

2. 平沢茂一「情報理論入門」培風館 (2000).

第9章　真空技術と高圧ガス

真空とは何もない状態である．真の真空状態が存在するかどうかは難しい問題だが，われわれは圧力がきわめて低い環境を真空とよんでいる．この意味では，われわれが住んでいるような環境はまれであって，程度の差はあるにしても，宇宙空間では真空がふつうの状態である．地上でもプラズマ，加速器などの世界では真空技術は必要不可欠である．

9.1　気体の運動と真空排気

気体の状態方程式 $pV = RT$ を思いだそう．R は気体定数で，$N = nV$ をアボガドロ数とすれば，$R = Nk$ である．ただし n は気体分子の密度，k はボルツマン定数である．これらを用いれば

$$p = nkT, \tag{9.1}$$

を得る．すなわち気体の圧力とは気体の密度と温度の積である．温度が室温付近で一定であるとすれば，圧力は密度だけに比例する．0^0C，1 気圧のいわゆる標準状態での分子密度 n は $2.7 \times 10^{19}\mathrm{cm}^{-3}$ である．

MKS 系における圧力の単位はパスカル (Pa) であって，Newton m^{-2} に等しい．慣用的には Torr=mmHg が用いられており，1torr=133Pa である．1 気圧は $1.01{\times}10^5$Pa である．天気予報ではヘクトパスカル hPa=100Pa が単位として用いられている．

ところで，後の考察のために熱運動速度をもとめておきたい．統計力学によれば，気体の速度分布関数は

$$f(v)dv = \frac{4}{\pi^{1/2}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) dv, \tag{9.2}$$

である．この関数は $v = 0$ と $v = \infty$ で 0，その間に最大値を持つ．最大値を与える速度 v_M を最確速度という．$\partial f/\partial v = 0$ より

$$v_M = \left(\frac{2kT}{m}\right)^{1/2}, \tag{9.3}$$

となる．20^0C の窒素を例にとれば，v_M は 417m s^{-1} である．速度の定義には，このほかに平均速度

$$\bar{v} = \int_0^\infty vf(v)dv = \frac{2}{\pi^{1/2}}v_M, \tag{9.4}$$

2 乗平均速度

$$\bar{v^2} = \int_0^\infty v^2 f(v)dv = \frac{3kT}{m}, \tag{9.5}$$

などがある．分子の運動エネルギーは $mv^2/2$ であるから，平均エネルギーを表すには 2 乗平均速度をつかえばよい．なおこれらの平均速度は気体中の音速にほぼ等しい．

真空をつくるということは，容器から気体を流し出すことである．流体としての気体を考えるときの重要な量の一つに**平均自由行程 mean free path** λ がある．これは気体分子が他の気体分子と衝突するまでに走る平均距離である．マックスウェル分布をなす密度 n，直径 d の分子の気体では

$$\lambda = \frac{1}{2^{1/2}\pi d^2 n}, \tag{9.6}$$

である．流れの代表的な寸法 (たとえば管径) を L としたとき，

$$K_n = \lambda/L, \tag{9.7}$$

を**クヌーセン数**という．流体は個々の気体分子があつまった不連続体であるが，$K_n < 0.01$ 程度であれば流体は連続体とみなしてよい．真空度が上がり，平均自由行程が大きくなるにつれ，この流体近似は適用できなくなる．このような領域の流れを**分子流**という．

真空ポンプ・真空系等の真空機器は，分子流領域にあるとき (おおざっぱないいかたをすれば，真空が良いとき) と，そうでないとき (真空が悪いとき) で使い分ける必要がある．

さて，容器の中を真空にする (正確に言えば，圧力の小さい状態にする) には容器 (この容器を真空容器という) の中の気体を真空ポンプでくみ出す (排気する)．排気するには真空容器に穴をあけてそこから気体を出すのだが，この穴を塞いだとして，そこにぶつかる気体分子数がすなわち排気される分子数と考える．単位時間あたり単位面積の壁にぶつかる気体分子数は，密度と平均速度を用いると

$$\Gamma = n\bar{v}/4, \tag{9.8}$$

である．質量で表せば $\Gamma_m = p\bar{v}/4$ であり，体積で表すと $\Gamma_V = \Gamma/n$ であるが，さらに絶対温度 T と質量数 M を用い，単位を $\ell\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ とすれば

$$\Gamma_V = 3.64\left(\frac{T}{M}\right), \tag{9.9}$$

となる．常温 300^0K の空気 ($M = 29$) ではこの値は $11.6\ell\mathrm{cm}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$ である．

真空ポンプの入り口面積を A とすれば，真空ポンプの排気速度の上限は

$$S_{ideal} = \Gamma_V A, \tag{9.10}$$

である．実際はこれに効率を表す係数 (ホー係数) を乗じたものとなる．係数の値はせいぜい 0.5 である．排気速度と到達真空度は真空ポンプのカタログに記載されている．

実は真空容器の壁はつねに気体を放出している．また真空容器に「もれ」がある場合もある．さらに，真空ポンプにはそれぞれに固有の到達真空度がある．例えばすぐ後に述べるロータリーポンプは油を使っているので，油の蒸気が到達真空度を決める．そこで，容積 V の真空容器を排気速度 S のポンプで排気したときの圧力の時間変化は，p_0 を到達真空度，Q_0 を容器内の気体発生と外部からのもれの合計として

$$V\frac{dp}{dt} = -S(p - p_0) + Q_0, \tag{9.11}$$

となる．理想的に $p_0 = Q_0 = 0$ とすれば，

$$p(t) = p_i \exp(-t/\tau), \quad \tau = V/S, \tag{9.12}$$

となる．ただし p_i は初期圧力である．

容積 10ℓ の真空容器を排気速度 $150\ell\mathrm{min}^{-1}$ のロータリーポンプで 760torr から 10^{-2}torr まで排気する時間は τ =10/(150/60)s=4s をもちいて，約 45s となる．実際にやってみると 2-3 分は必要であるが，この差は (1) 真空容器から真空ポンプまでの配管，(2) ガス分子が壁で弾性散乱せず，一時的に滞留する現象，等が関与する．

真空容器から真空ポンプまでをガスが円滑に流れて初めて真空ポンプは能力を発揮できる．一般に配管内の流量は

$$Q = C\Delta p, \tag{9.13}$$

とあらわすことができる．C を**コンダクタンス**という．Q を単位 Torr l s^{-1}，p を単位 Torr であらわせば (Torr でなく Pa ても同じ) C の単位は l s^{-1} となる．コンダクタンスを解析的に求めるのことはかなり難しいが，半径 $a$mm，長さ Lmm の円管 ($r << L$ とする) では実用的な式として

$$C[\mathrm{l}\cdot\mathrm{s}^{-1}] = \mathrm{a[mm]}^3/\mathrm{L[mm]}, \tag{9.14}$$

が成り立つ．この式は当然のことであるが,「配管は太く短く」と教えている．電気回路理論では抵抗の逆数をコンダクタンスという．コンダクタンスを並列に接続すると合成コンダクタンスは

$$C = \sum_i C_i,$$

となり，直列の場合は

$$1/c = \sum_i 1/C_i,$$

となる．これは電気回路についても気体流路についても成り立つ．

なお式 (9.11) において，$dp/dt = 0$ とおけば，定常に達したときの圧力，すなわち特定の真空容器に特定のポンプをつないだときの到達圧力が

$$p_\infty = Q_0/S + p_0, \tag{9.15}$$

と求められる．

9.2 真空ポンプ

真空ポンプの中で実験室にもっとも普及しているのは**ロータリーポンプ (油回転ポンプ)** であろう．図 9.1 にロータリーポンプの動作原理を示した．すなわち，気体を吸い込み，圧縮して排気口から押し出すという動作を 1 回転の間に行う．シリンダと称する固定された容器の中をロータと称する円筒が回転するのだが，ロータとシリンダの隙間を油がシールしている．このように油を用いているので，排気を停止したら必ず低圧側に空気を導入しなければならない (低圧側をリークしなければならない)．さもないと油が低圧側に侵入し，真空容器が汚れてしまう．

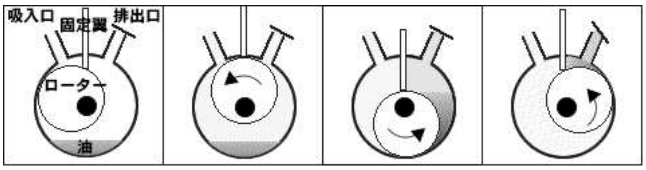


図 9.1: ロータリー・ポンプの動作原理.

ロータリーポンプの排気速度 S は 1 周期で排気できる体積 V と回転数 f の積，すなわち $S = fV$ で与えられる．ポンプにより数 $\mathrm{m}^3\mathrm{h}^{-1}$ 程度から $100\mathrm{m}^3\mathrm{h}^{-1}$ 台のものまである．ただしポンプの到達真空度 p_0 は 0.01Pa 台である．この値はポンプ内で発生し真空側へ逆流するガス量 q_0 と排気速度とのバランスで $p_0 = q_0/S$ のように定まる．この q_0 には作動油の蒸気圧が

含まれる．V を大きくして S を稼いでも，その代償として q_0 が大きくなってしまう結果である．このようにロータリーポンプで到達できる真空度は 0.01Pa 台の後半なので，より高真空が必要なときはロータリーポンプを粗排気ポンプとして用い，第 2 のポンプを主排気ポンプとする．

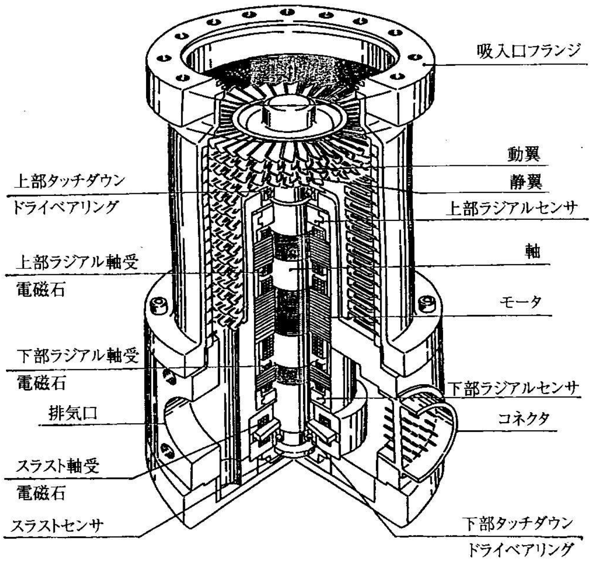


図 9.2: ターボ分子ポンプ．

20 年くらい前までは拡散ポンプをよく見かけたが，現在では**ターボ分子ポンプ**が代表的な主排気ポンプとなっている．このポンプは分子流領域でのみ威力を発揮する．図 9.2 において，気体は上から吸い込まれて下へと排気される．中には回転する「動翼」と，固定された「静翼」の 2 種類の翼が交互に配置されている．気体分子の平均自由行程が翼の寸法より大きい領域で正常に動作する．図 9.3 の方向に動翼が高速で動

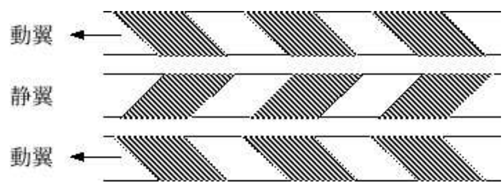


図 9.3: ターボ分子ポンプの原理．気体分子にとって図の上から下の方向に移動することは容易だがその逆は難しい．

いているものとし，その速度は気体分子の熱速度程度としよう．この場合上から下へ移動しようとする分子にとってこれらの翼はじゃまにならない．しかし下から上へ移動とする分子は翼にじゃまされる．実際は翼の速度 v_W と熱速度 v_T の比が $v_W/v_T \sim 1$ 程度となるとポンプ効果が現れる．

9.3 真空計

真空計は低い範囲の気体圧力を測定する計器である．真空計は多種多様であり，測定領域に適したものを選ぶ必要がある．いうまでもなく一定の面積にかかる力そのものを計る方式が最も直接的である．これに属するものには U 字管マノメータ，マクラウドゲージがある．前者は高真空度までは使えないし，後者は日常的に使う目的には適さない．ここでは低真空領域で用いるピラニ真空計と，より高真空領域で使用可能となる電離真空計を紹介する．

ピラニ真空計は気体の熱伝導率が気体の圧力に依存することを利用する．ただし熱伝導率は高圧では圧力に依存しない．また，圧力が十分低くなって，分子条件が満足される領域にはいると，すなわち分子同士の衝突がなくなり，分子は容器の壁以外に衝突する相手がなくなると，熱伝導率は圧力に無関係になる．ピラニ真空計がつかえるのは $100 - 10^{-1}$Pa 程度の領域である．さらに，熱伝導率は気体の種類に依存する．いいかえれば，ピラニ真空計の出力は気体の種類に依存する．

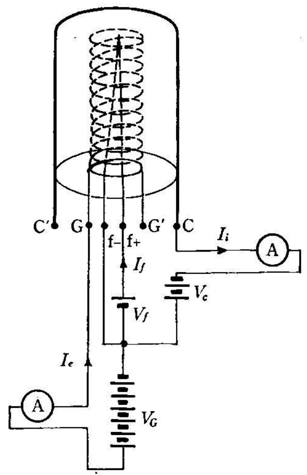


図 9.4: 電離真空計．(参考書 1 による．)

ピラニ真空計が使えない領域では電離真空計が使える．ピラニ真空計と電離真空計は相補的である．電離真空計には熱陰極型と冷陰極型があるが，ここでは熱陰極型を説明する．この真空計はフィラメントから出た電子線により気体分子をイオン化し，そのイオン電流を計るものである．気体圧力の高い環境でこの真空

計を使うとフィラメントが焼き切れてしまう．

図 9.4 は電離真空計の構造である．電位はコレクターが最も低く，グリッドを最も高く，フィラメントはその中間になるように与える．フィラメントから出た熱電子はグリッド周辺で数回往復運動し，その際あるものは気体分子と衝突し相手をイオン化する．電子はグリッドに，イオンはコレクターに流れ込む．これらの電流値を I_e, I_i とすれば S を定数として

$$I_i = SI_e p,$$

となる．S は電離真空計に固有の値でおおむね 10 ないし 20Torr^{-1} の程度である．気体によって電子衝撃による電離断面積がことなるので，S は気体の種類にも依存する．普通は窒素に対する感度を 1 とし，他のガスでは補正係数を掛ける．

電離真空計の測定限界は 10^{-5}Pa 程度である．これは電離真空計自体の持つ雑音のためである．フィラメントを出た熱電子はグリッド・フィラメント間の電圧 ($\sim$150V) で加速される．この電子がグリッドをたたくと x 線が発生する．この x 線がコレクターに当たると，光電効果により電子を出す．これは電荷の収支という見方をすると，コレクターにイオンが飛び込むのと同じことである．この効果がこの真空計の測定限界を決める．

なお冷陰極電離真空計の指度は熱陰極型にくらべて不正確であるが，取り扱いは容易である．代表的なものに, 磁場中のベニング放電を利用したベニングゲージがある．これがポートについていると，スパナなどの工具が磁石に引き寄せられるのでまことにやりにくい．

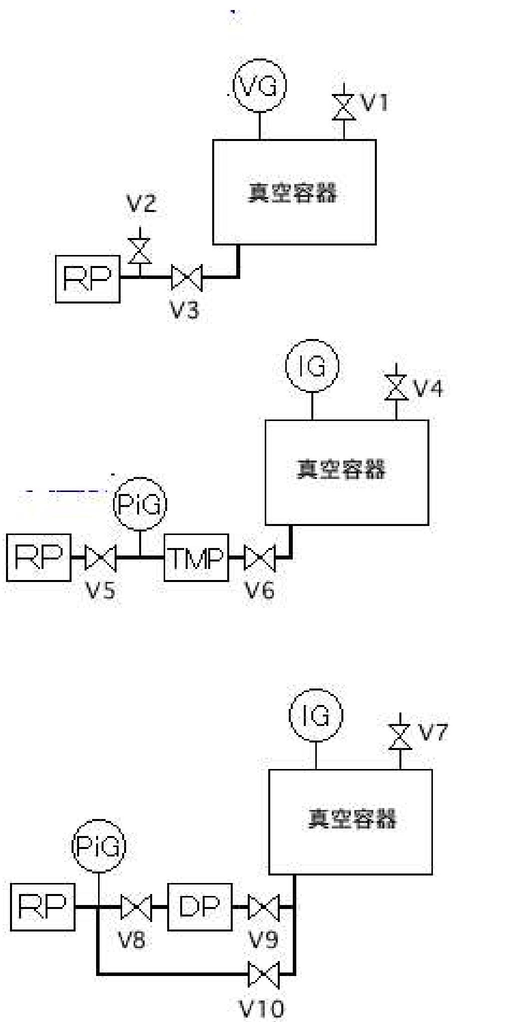


図 9.5: 真空システムの例．RP: ロータリーポンプ, TMP:ターボ分子ポンプ，DP:拡散ポンプ，IG:電離真空計，PiG:ピラニ真空計，V1-V10 はゲートバルブ．

9.4 真空システム

図 9.5 に真空システムの例を 3 つ示した．上はロータリーポンプ (RP) を用いた最も単純な例である．ポンプを停止しても真空容器内を気密に保つために，配管中にバルブを設けた．真空容器のふたは大気圧との差圧で吸い付くので，ふたを開ける際にはリークバルブを通して中に空気を入れる．また、油の逆流を防止するために，ＲＰは停止したら吸気側を大気に開放する必要がある．そこで吸気側付近にもリークバルブをつける．なおこのリークバルブは下のふたつの図では省略した．

中の図と下の図は 10μPa 程度までの高真空を達成する場合の構成例である．ターボ分子ポンプ (TMP) も拡散ポンプ (DP) も大気圧から作動させることはできないので，ＲＰとの２段構えになっている．中の図ではＴＭＰを停止した状態で先ずＲＰで 10 Pa 程度まで排気し（ピラニ真空計 PiG で確認する），その後ＲＰを運転したままＴＭＰを起動する．高真空領域の真空度は電離真空計 (IG) で測定するのだが，この IG のスイッチは低真空領域では切っておく．真空槽を頻繁に開閉するような場合には，TMP を使う場合でも，下図の構成（ＤＰの位置にＴＭＰを置いた構成）にした方がよい．また，例えばターボポンプ上流のバルブは高真空用のものでなければならないのに対し，ＲＰ側のバルブは中真空用でも構わないなど，材料や部品が圧力領域に応じて選ぶ必要がある．

下は拡散ポンプを用いた構成例であって，粗引きのための配管が追加されていることである．ＤＰは大気圧から作動させることができないこと，一旦起動する

と停止するまでに時間がかかることがその理由である．最近ではＤＰの替わりにＴＭＰが用いられることが多い．

大気圧における気体の圧力は約 1kg/cm^{-2} である．真空容器などは頑丈に作らないと，ポンプで引いたとたんにぺちゃんこになってしまう．真空容器・ダクト・バルブ・ポンプなどの間の接続には，これらの終端にフランジをつけ，フランジ同士を接続する．このためにフランジは規格化されている．フランジから真空が漏れないようにガスケットを挿入する．これはゴム，柔らかい金属等でできていて，これらが外から締め付けられた結果押しつぶされて間隙を埋めるものである．ゴム製のものでは O リングが一般的，熱がかかるところには金属製のガスケットを用いるが，ICF コンフラットフランジはこのための代表的なフランジである．

すでに述べたように，到達真空度，すなわち真空容器を真空ポンプで排気し続けたときの真空度は，ふつうは真空容器の内部から放出されるガスと排気との平衡で決まる．真空容器を金属で作るものとすれば，金属からの放出ガスは金属の蒸気圧であって，これはきわめて小さい．実際は金属表面の汚れから，さまざまなガスが発生し，到達真空度を決めている．真空ポンプで長時間排気を続けると徐々に真空度が上がるが，これは吸着されていたガスが排気されるためである．温度を上げて排気すれば (この操作をベーキングという)，より短時間に固体表面を清浄化することができる．

いったん内部を清浄化した後では，素手ではふれずナイロンの手袋で扱う等の注意が必要である．真空容器内部に回路配線をする必要が生じることもよく起こるが，配線材料の選択には十分注意しなければならない．

9.5　高圧ガス容器とガスの配管

真空と対極にある話題だが，共通点が多いのでここで取り上げる．プラズマの実験などでは，容器を真空に引いた後で，同じ容器を純粋なガスで満たす．実験室ではこのガスは「ボンベ」と呼ばれる金属製の円筒容器に入れたかたちで供給される．このガスの圧力が 10kg cm^{-2} 以上であれば，法的に高圧ガスということになる．容器にはその容器の製造所，ガスの種類，容積，重量，検査年月日等が刻印されている．

このボンベは多少の安全率がみてあるとはいえ，内部圧力に耐えるのが精一杯に作られているのだから，運搬時に衝撃を与えることは厳禁である．ごく近距離の運搬にも専用の手押し車を使うべきだが，やむを得

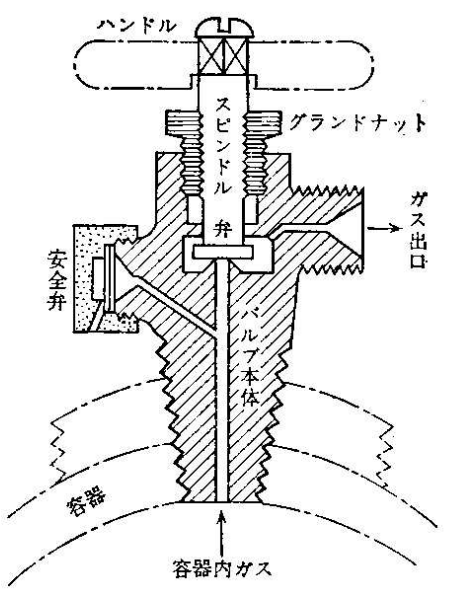


図 9.6: ボンベのバルブ.

ない場合は容器をわずかに傾け，下縁でころがしながら運ぶ．ボンベのてっぺんには 図 9.6 のようなバルブが着いている．ガス出口のねじは法的に「可燃性ガス」とされているものは反対ねじ (左ねじ) がきってある．安全弁には手をふれないこと．

図 9.7: 圧力調整器.

ふつうは減圧してから外に取り出すために，バルブの出口に 図 9.7 のような「圧力調整器」をとりつける．この調整器はガスにあわせたものを使用しなければならない．調整器には低圧側・高圧側用に 2 つの圧力計が着いている．高圧側の圧力計はボンベ内部の圧力である．圧力調整器出力を閉じてから，調整器でのぞみの圧力に調整して使用する．

ガスの配管にはシンフレックス Synflex というフッ

素を含む高分子化合物の管や金属管が用いられ，また管のつなぎにはスエジロック Swedgelok と称する金属製の継ぎ手がよく用いられる．これらがアメリカないしカナダの製品であるためか，管の規格はインチサイズが主流である．

問題

1. クヌーセン数が 0.01 より大きい流れを分子流とみなす．300K において直径 10mm の管の流れが分子流と見なせるための真空度を Pa で答えよ．ただし空気分子を直径 0.378nm の球であるみなし，ボルツマン定数を $1.38 \mathrm{x} 10^{-23}$J K^{-1} とする．

2. 以下の機器のうち，分子流領域でなければ使えないものはどれか．
ロータリーポンプ，ターボ分子ポンプ，ピラニ真空計，熱陰極電離真空計．

参考書

1. 堀越源一「真空技術 (第 3 版)」東京大学出版会 (1995).

第10章　光学技術

10.1　光学部品

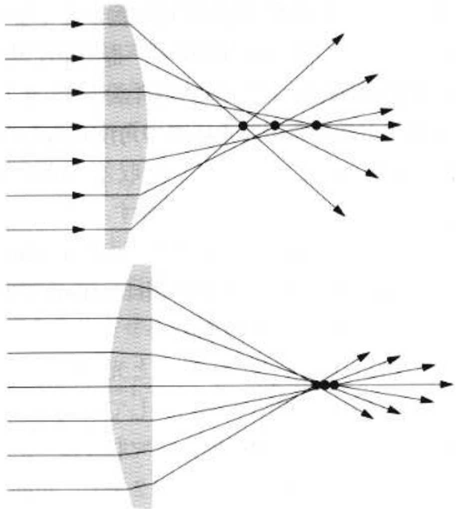


図 10.1: 平凸レンズによる集光.

まずおもな光学部品たちを紹介したい．一番単純なものは窓 window である．真空容器の内部にレーザーを入射するとか，真空容器内部からの光をとりだすためには窓が必要である．ガラス製の平行平面基盤 optical flat はそのまま，あるいは減反射コーティングして窓として用いる．またこれに逆に高反射コーティングをすれば平面鏡となる．平面鏡は光の方向を変えるために用いる．平面度は波長 λ を指定し，凹凸の山と谷の間の値を $\lambda/4$,$\lambda/10$ などとあらわす．可視域では $\lambda/20$ 程度のものまで商品化されている．他にレンズ・ミラー・フィルター・プリズム・偏光用素子などがある．

凸レンズ・凹レンズには両凸・平凸・両凹・平凹の種類がある．理想的なレンズは平行光線を 1 点 (焦点) に集めるが，現実のレンズは収差を持つ．色収差は屈折率の波長依存性により生じる．これを利用したのがプリズムである．単色光で生じる収差は「ザイデルの 5 収差」に分類される．平行光線を 1 点に集めるとき，図 10.1 に示すように，平凸レンズを正しい向きに使えば，球面収差を最小にすることができる．

幾何光学では光線が進む方向を正・逆方向を負とする．レンズを挟んで物体あるいは光源と，レンズが作る像があるときは，像側に「'」をつける流儀もある．これに従えばおなじみのレンズの公式 (ガウスの結像公式) は，物体とレンズ，レンズと像との距離をそれぞれ s, s'，レンズの焦点距離を f として

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f},$$

となる．

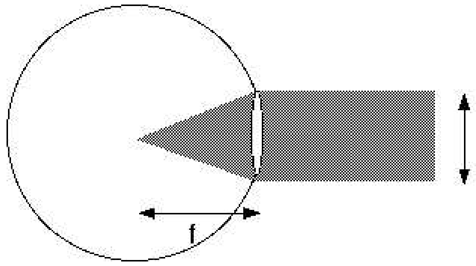


図 10.2: F ナンバー.

レンズの目的というと「結像する」ことを思い浮かべるが，光を集めることと言い換えることもできる．f を焦点距離，D をレンズの直径としたときに定義される F ナンバー $F = f/D$ は，レンズの明るさを表す量といわれるが，レンズが光を集める能力を示す量である．図 10.2 の仮想的な球の中心に，等方的な小さい光源があるとしよう．この光は立体角 4π で発散する．光源から f の位置に直径 D の凸レンズを置けば，レンズを通過した光は平行光線として進む．レンズがひろう光量は，光源がレンズを見る立体角である．レンズの面積は $\pi D^2/4$，レンズの位置で光源をかこむ球面の面積は $4\pi f^2$ なので，光源の光量の $(D/f)^2/16$ がレンズに入る．立体角は $\pi(D/f)^2/4 = \pi/4F^2$ である．

ミラー用のコーティングは広波長域をカバーするためには金属，特定の波長で高い反射率を必要とするため (レーザーの反射のため) には誘電体多層膜が用いられる．金属としてよく用いられるのはアルミニウム，金で，アルミニウムは可視域で 90% 弱の反射率を持つが，酸化により劣化するので，保護膜とともに用いる．金は赤外領域で高い反射率を持つ．反射率は垂直入射か・斜め入射かにより異なり，また入射光がどう偏光しているかによっても異なる．誘電体多層膜コーティングは特定の波長で 99% を越える反射率を実現する．これはガラス基板上に高屈折率と低屈折率の誘電体膜を 1/4 波長の光学膜厚で交互に積層したものである．

大出力レーザーを集光するためにレンズを用いるとレンズが壊れる．このためこうしたレーザーの集光には反射光学系すなわちミラーを用いる．球面鏡 (凸面鏡・凹面鏡) で凸レンズ・凹レンズの働きを代用することはよく知られている．放物面，楕円面の面の焦点と軸を含む断面は 2 次曲線になる．放物線の方程式を

$$y^2 = 4px,$$

と書けば，焦点は $(p, 0)$ である．また楕円の方程式を

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b$$

と書けば，ふたつの焦点は $(\pm(a^2 - b^2)^{1/2}, 0)$ である．これらの面 (の一部) でミラーを作れば，放物面鏡では平行光線を 1 点に集光することができる．また楕円面鏡ではひとつの焦点から出た光をもう一つの焦点に集めることができる．

プリズムというと光を波長で分散することを思いうかべるが，現在では分散には回折格子を用いる方が一般的である．むしろ像の反射・回転などにしばしば用いられる．またグラン・テーラー・プリズム，グラン・トムソン・プリズム，ウォラトン・プリズムなどは偏光を分離するために用いられる．

光学装置にはほこりが大敵である．レーザーはクリーンルームと称する部屋に設置することもある．クリーンルームでは空気の循環路の途中にフィルタをおいて空気中の微粒子を除去する．清浄度の程度としてクラス 10，クラス 100 などの呼び方がある．これはアメリカの規格であって，粒径 0.5μm 程度の粒子の 1 立方 ft あたりの数である (1foot は 30.48cm)．クリーンルームでは無塵衣という特殊な作業着に着替え，クリーンキャップやクリーンシューズを着用することもある．入り口にエアシャワーが設置されている場合もある．クリーンルームは光学関係だけでなく，半導体，生物学などの分野でも一般的である．

光学装置にとっては振動も大敵である．装置は除振台と称するテーブルの上に組み立てる．除振台は重い搭載盤 (天板) とそれを支える架台で構成されており，天板と架台はばねでつながれている．この図の場合は空気ばね (エアダンパー) であるが，液体をばねとして使うこともある．機械的なコイルばね，あるいは厚いゴム板なども好んで用いられる．除震台というと聞こえが良いが，じつはこのばねの時定数が大きいので，時間的に細かい振動がテーブルの上のものに伝わらないというだけのことで，おそい (ゆっくりとした) 振動は伝わらざるを得ない．

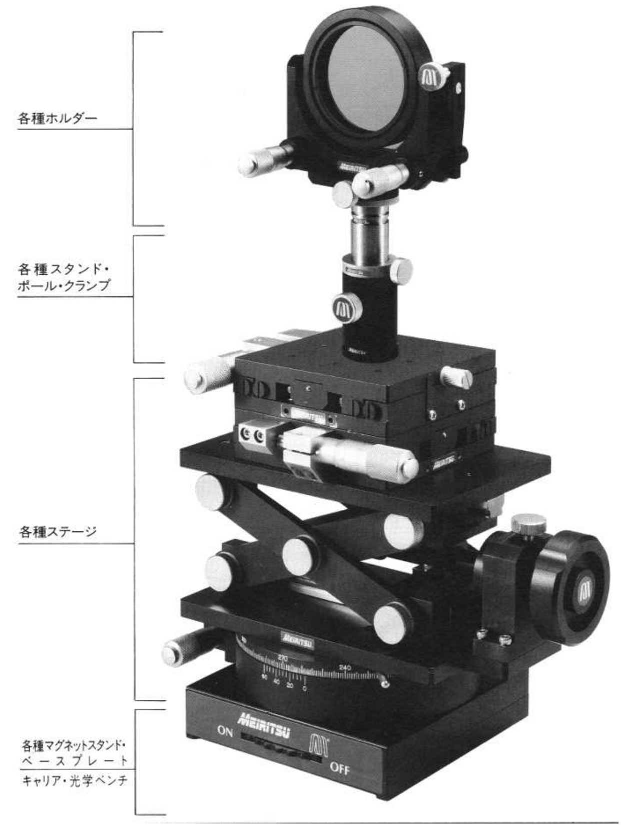


図 10.3: 光学素子の除振台への実装.

光学素子をこの除振台に固定するためにはいろいろな部品を用いる．図 10.3 に例を示した．実際はこれは説明のための図であって，これほどこてこてといろいろなものを使うことはまずない．一番下のものはマグネットスタンド，マグネットベースなどといわれるもので，磁力により鉄製の天板に固定する．天板にねじ穴をつくり機械的に固定するやり方もある．

その上にあるのは，下からいうと，回転ステージ・ラボジャッキ・xy ステージである．これらは光学素子の位置を調整するために用いる．高さの微調整には z ステージを用いるが，この図には描かれていない．これらは必要に応じてステップモーターにより遠隔操作する．

トップに装着するホルダーと称するものには，レンズホルダー・ミラーホルダーなどがある．図のものはジンバル式ミラーホルダーで，円盤形の光学素子を水平軸および垂直軸のまわりに多少回転できる．これをねじでポールに止め，さらにこのポールをスタンドで受ける．ポールの直径は 12mm および 20mm に規格化されている．図にはないが，ポールにクランプと称するものをつけて，横腕を出すこともある．またスタンドとしてはコレット式と称する，ロッドを四方から

中心に向かって締め付けるものも用いられる．

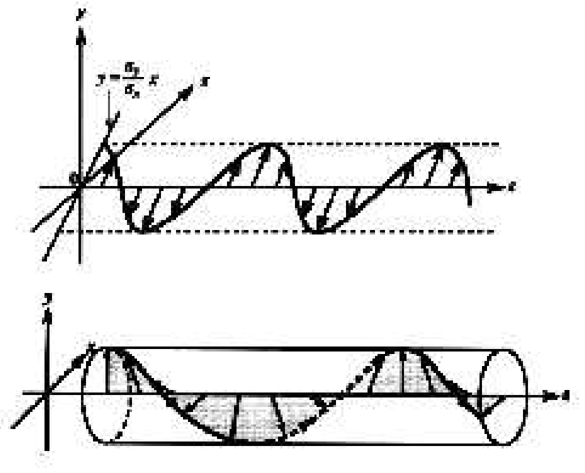


図 10.4: 直線偏光 (上) と円偏光 (下).

10.2　波動光学

光は電磁波のうち特定の周波数帯に属するものの総称である．電磁気学が教えるように，電磁波のうち最も数学的に単純なものは平面波である．これを $E, H.k$ の 3 つのベクトルで表すことができる．ただし k は波数ベクトルでその方向は波の進行方向である．ここで $k=\infty$ すなわち光の波長をゼロと近似しても，日頃経験する光の直進から，レンズの光線追跡まで，いろいろなことが説明できる．この近似のもとで構築された光の伝播理論を**幾何光学**という．これに対し波数ないし波長を取り入れた理論を物理光学あるいは**波動光学**という．**回折・干渉・偏光**は波動光学でなければ説明できない現象である．光学が対象とするのは可視光であって，波長は400nm から 800nm の範囲にある．これより波長が短い電磁波が紫外線，長い電磁波が赤外線である．

偏光: さて図 10.4 に示すように，$\mathbf{E}, \mathbf{H}.\mathbf{k}$ は互いに直交する右手系で，　このうち $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ は同位相で一定の比例関係にある．$\mathbf{E}$ ベクトルの振動面を光の偏光面と定義する．平面波は直線偏光している．

ふたつの偏光面が直交する，同一の単色点光源から出た光に対して「重ね合わせの原理」が成り立つ．ふたつの光の位相差を δ とする．このとき重ね合わされた光のもつベクトル $\mathbf{E}$ の矢印の先端のベクトルをたどると 図 10.4 下のようならせんとなり，これを $\mathbf{k}$ に垂直な平面に投影すると一般には楕円となる．このような光を楕円偏光という．$\delta=0,\pi$ であれば直線偏光となる．また $\delta=\pi/2$ あるいは $3\pi/2$ であればもとの直線偏光の方向と軸が一致した楕円偏光となり，もとの光の大きさが等しければ円偏光となる．

偏光素子とは入射光のうち特定の方向に偏光した成分を取り出したり，あるいは入射光をふたつの直線偏光に分離したりする素子である．さきにあげたいくつかのプリズムのほか，シート状のものもある．また，波長板と称するものは入射光に位相差を与えたものを出射光とする．$\lambda/2$ 波長板，$\lambda/4$ 波長板はそれぞれ半波長，1/4 波長の位相差を与える．

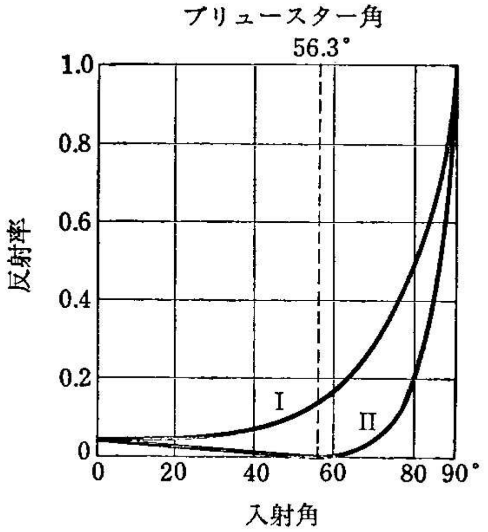


図 10.5: ガラス表面の反射率 (I) s 偏光すなわち $\mathbf{E}$ が表面と垂直なとき，(II) p 偏光すなわち $\mathbf{H}$ が表面と垂直なとき．

普通のガラスでも偏光状態によって反射率が変わる．図 10.5 において，$\mathbf{H}$ が表面と垂直であれば，ある角度 (ブリュースター Brewster 角) で反射率はゼロとなる．この現象を利用すれば特定の偏光を分離できる．なぜこのような現象が起きるかは，電磁気学の教科書を勉強していただきたい．

干渉: 干渉は同じ光源から出た電磁波 (光波) が異なる光路を通った後，同じ空間の 1 点に異なる時刻に到達したときに観測される現象である．図 10.6 において，L は光源，F は特定の波長の光だけを通すフィルタ，S および S_1, S_2 は 2 枚の前後する遮蔽板にもうけたスリット，D はスクリーンである．遮蔽板とスクリーンの距離は，S_1・S_2 間の距離に比べて十分大きいものとする．このとき，干渉により，スクリーンには

縞模様があらわれる．図の実線は光が作る波面の山，点線は谷を表すとしよう．縞模様は山と山が重なる方向では光が強め合い，山と谷が重なる方向では光が相殺される結果である．干渉が観察されるためには，光が単色に近く，また光源が小さいことが必要である．このような光をコヒーレンスが良い光，コヒーレントな光などという．

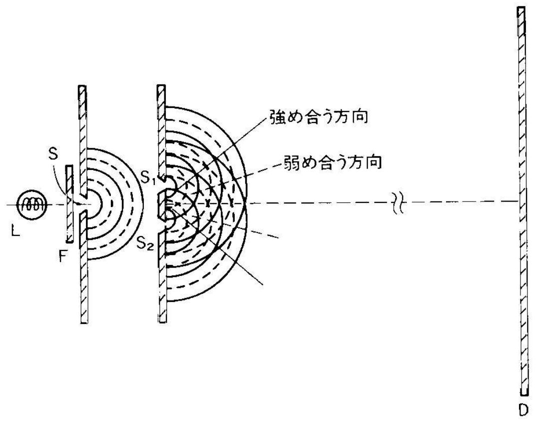


図 10.6: ふたつのスリットによる干渉 (ヤングの干渉)．(参考書 2 による．)

回折: 光が障害物によってさえぎられたとき，その背後の幾何学的には影になる部分に光が回り込む現象を回折という．遮蔽板に図 10.7 の左側のような穴 (開口) をつくり，これを平面波で照らすと，背後には右側のようなパターンができる．

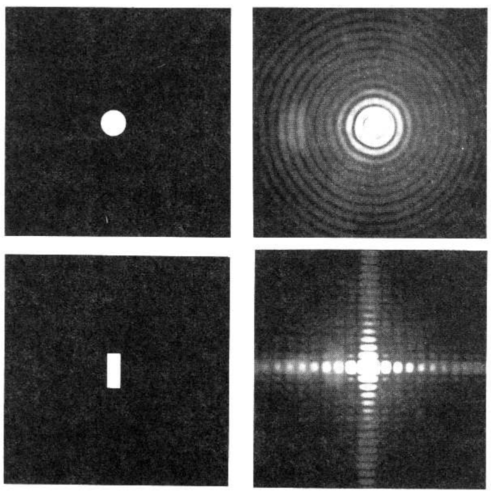


図 10.7: 円形開口および矩形開口による回折．(参考書 2 による．)

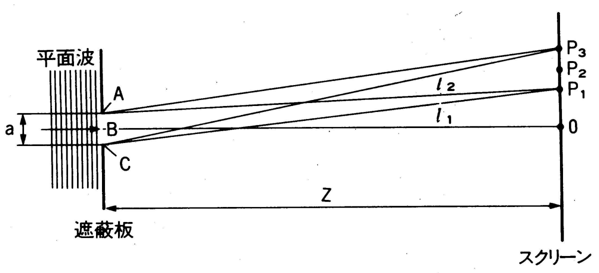


図 10.8: 有限な幅を持つスリットによる干渉すなわち回折．(参考書 2 による．)

図 10.6 では 2 次波を発生するのはふたつのスリットであった．図 10.8 のようにこの遮蔽板のふたつのスリットを，有限のスリットに置き換えよう．この長いスリットは無数の小さなスリットの連続と考えることができる．スリットの両端の点 A,C からスクリーン上の任意の P_1 までの距離を ℓ_1, ℓ_2 とすると，光路差 $\ell_1 - \ell_2$ が光の波長の整数倍であれば P_1 は暗くなる．これは A 点からの光と C 点からの光の位相差が 2π(あるいはその整数倍) なので，AC 間の光について積分するとゼロとなるからである．光路差 $\ell_1 - \ell_2$ が光の波長の (整数プラス 1/2) ばいであれば明るくなる．図 10.7 のパターンはスクリーン上の各点についてこのような計算を行えば得られる．なお，以上の記述は開口の大きさが遮蔽板・スクリーン間の距離に比べて十分小さいときに当てはめることができる．このとき見られる回折をフラウンホーファー回折という．スクリーンを開口に近づけるとフレネル回折といわれるパターンにかわる．

10.3　レーザー

図 10.9 に示すように，**レーザー**は電子回路の発振器のアナロジーで説明することができる．電子回路は電子の運動で機能を発揮するが，電子に変わって光子が運動すると考えていただきたい．すでに学んだように，正帰還つきの増幅回路は発振器を構成する．レーザーでは光の帰還 (フィードバック) は鏡で光を返すことで実現する．光の増幅は誘導放出，すなわちレーザー媒質が 1 個の光子を吸収すると 2 個以上の光子を放出することで実現する．これが可能なためには，反転分布，すなわち媒質において上位の励起順位にある電子数が下位の順位の電子数よりも多くなければならない．この反転分布を作り出しているのが励起光源 (ポンプ光) で，電子回路の電源に相当する．

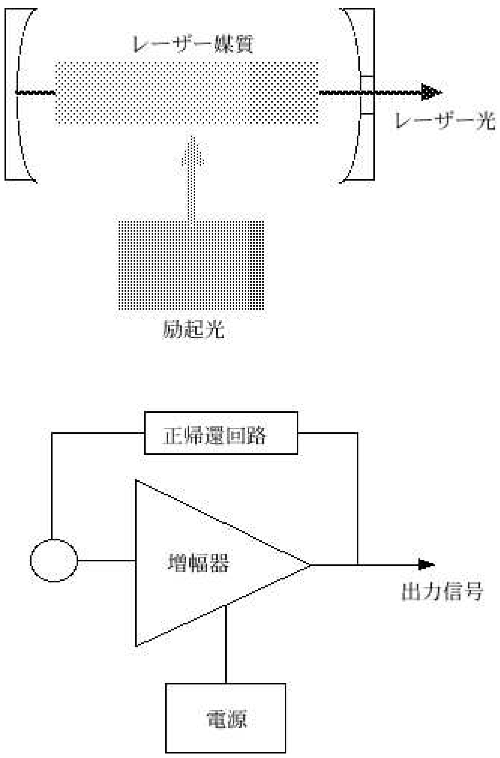


図 10.9: レーザーと発振器のアナロジー.

レーザー光は次のような特性をもっている.

- 指向性. 2 枚の鏡の中心をとおる光だけが増幅されるためである.
- 可干渉性 coherency. 時間的・空間的に位相がそろっていること.
- 単色性.
- エネルギー集中性. 高輝度性. レーザーの平均電力は従来の光源に比べて高いわけではないが, 指向性がよいので, 単位面積あたりの電力は高くなる. この性質ゆえにレーザー核融合などの可能性がある.

レーザーはレーザー媒質により, 気体レーザー・色素レーザー・固体レーザー・半導体レーザーに分類するのが一般的である. このほか, 波長領域, 出力, 時間特性などで分類することも可能である.

気体レーザーにはヘリウム・ネオン He-Ne レーザー, アルゴン Ar レーザー, 炭酸ガスレーザーなどがある. ヘリウム・ネオンレーザーは小型で可視領域 (6300nm 赤色) で連続発振する. 5mW 以下の出力のものが各種応用に使われている. アルゴンレーザーはヘリウム・ネオンレーザーに比べると高価なうえに短寿命であるが, 可視域マルチラインで 100W 程度までの高出力が得られる. 炭酸ガスレーザーは 10μm 付近の赤外領域で発振する. 10kW 程度までの大出力が得られるので加工業その他の産業で利用されている.

一般にレーザーの波長はレーザー媒質の励起順位間のエネルギー差で決まる. 言い換えれば波長を人工的に制御するには限界がある. 色素レーザーは可視域でわりに自由に波長を選択することができる. 有機溶媒にいろいろな色素 (数百種類あるといわれる) を溶かしてレーザー媒質とするためである.

固体レーザーは透明な絶縁体に不純物イオンを混ぜ, このイオンをレーザー媒質とする. 不純物とはいえ, その密度は気体レーザーの場合に比べ桁違いに大きいので, 大出力が可能である. たとえば YAG レーザーは Nd^{3+} イオンを YAG ($Y_3AL_5O_{12}$) 結晶に不純物としていれたものである.

レーザーを使う実験ではレーザーによる傷害に神経質になる必要がある. レーザーは放射線と異なり, 生体を透過したり体内に蓄積したりすることはない. 眼球以外の組織は不透明なので, レーザーは皮膚より奥には浸透しない. 目に起きる症状は角膜炎, 白内障などであり, 皮膚はやけどをする. パルスレーザーはまばたきで目を保護することができないので特に注意を要する. JIS では安全の観点からレーザーをクラス 1 から 4 に分類している. 常識的に安全なレーザーはクラス 2 まで, 可視域で出力 1mW 以下のものである. 実験室では実験のために動き回る動線が, レーザーの光を横切らないように, 実験の設備・機器を配置することが必要である. またレーザーは単一波長であるから, この波長を吸収するフィルターをめがねとすることも有効である.

レーザーはふつうの光とかなり違った特性を持っており, われわれはこの特性を活かした使い方をする. ある意味ではレーザーの方が扱いやすいといえるかもしれない. なぜならば, レーザーは単色なので, 色収差など気にしなくてよい. そのうえ指向性の良いビームの光軸上で使うのだから, ある種の収差とも無縁だからである.

ふつうレーザーを光軸に垂直な断面で切ったときの放射強度分布は

$$I(r) = I_0 \exp[-2r^2/w^2] = \frac{2P}{\pi w^2} \exp[-2r^2/w^2], \tag{10.1}$$

であり, 図 10.10 はこれを図示したものである. このようなビームを**ガウスビーム**という. w は強度が $1/e^2$ に落ちるビーム径である. この式は正規分布に書き直

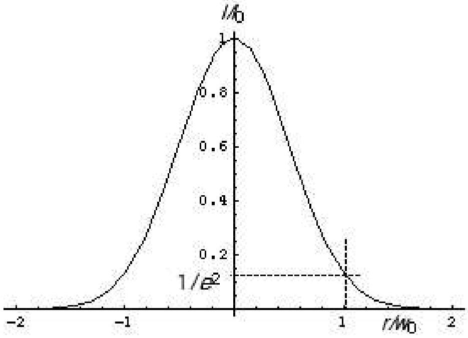


図 10.10: ガウスビームの放射強度分布.

すことができるが，正規分布の標準偏差 σ を用いれば $w = 2\sigma$ である.

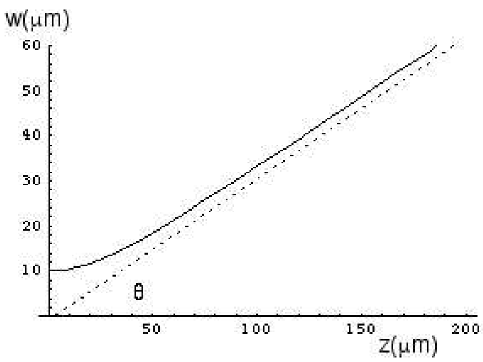


図 10.11: ガウスビームの包絡線とその漸近線. $\lambda = 1\mu$m, $w_0 = 1\mu$m.

ガウスビーム径 w が原点で最小値 w_0 をとるものとすると，w の光軸 (z 軸) への依存性は λ をレーザーの波長として

$$w(z) = w_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]^{1/2}, \qquad (10.2)$$

である．これを図 10.11 に示す．$z \gg w_0\ 2/\lambda$ では $w \sim \lambda z/(\pi w_0)$ となり，放射強度が $1/e^2$ となる面は $\theta = \lambda/(\pi w0)$ を頂角とする円錐面に漸近する.

ビーム径が $\sqrt{2}$ 倍にまで拡がる距離を**レイリー長**といい

$$z_R = \pi w_0^2/\lambda, \qquad (10.3)$$

で定義する．レイリー長の範囲ではビーム径を一定とみなす場合がある.

問題

1. 太陽でものを照らしたときその影の輪郭はもとの物体の縁よりも不鮮明である．この理由を述べよ.

2. (1) 等方的に毎秒 I 個の可視域の光子を出す光源がある．光源は十分小さいとする．この光源から 1m 離れた点に半径 5mm の検出器をおいたとき，この検出器が毎秒受け取る光子数はいくつか.

   (2) 光源と検出器の間に半径 50mm，焦点距離 250mm の凸レンズを入れて検出器が受ける光子数を増やしたい．レンズを光源から何 mm の地点に置くのが適当か．またこのとき検出器が毎秒受け取る光子数はいくつになるか.

参考書

1. 鶴田匡夫「応用光学 I,II」培風館 (1990)，ただし内容は高度である.

2. 光学のすすめ編集委員会「光学のすすめ」オプトロニクス社 (1998).

3. このほか，光学機器メーカー (シグマ光機，駿河精機，メレスグリオ，ニューポートなど) のカタログに役に立つものが多い．中には光学の教科書のようなものまである.

第11章　放射線とビーム

11.1　放射線とビーム

世の中で**放射線**というと，α **線，**β **線，**γ **線，中性子線**を指す．α 線の実体はヘリウム原子核，β 線の実体は電子，γ 線の実体は光子である．これら (中性子もふくめて) が主として原子核の崩壊に伴って，ある程度の運動エネルギー (ここでは 1MeV 程度のエネルギーとしておく) とともに放出されるとき放射線とよぶ．この定義は歴史的なものである．現在では加速器のビームとして，また加速器からの放射光としてこれら放射線と同等のものが得られる．ただし放射線は原子核から等方的に，四方八方に飛び出すのに対し，ビームは方向がそろっている．ここでは荷電重粒子線，電子線，光子線，中性子線と分類する．

x 線は γ 線同様光子線である．歴史的には原子核が関与する機構で発生するのが γ 線，関与しない機構で発生するのが x 線とされてきた．一般に γ 線のほうがエネルギーが高い．x 線管は高速電子を標的にぶつけて x 線を得る．電子が原子核近くの電場中でクーロン力を受けて進行方向を変えると，失ったエネルギーに等しいエネルギーのX線が発生する．この現象を**制動放射**という．得られる x 線のエネルギー分布は連続である．いっぽう，高速電子が内殻軌道 (K殻, L殻) にあった電子をはじき飛ばすと，電子が失われた後の空席に他の軌道電子が入り，両軌道電子の結合エネルギーの差に等しいエネルギーのX線が発生する．こうして得られる x 線を**特性 x 線**という．特性 x 線のエネルギーは線スペクトルである．図 11.1 はモリブデンを陽極として高圧をかけて得られる x 線のスペクトルである．

エネルギーの単位としては**電子ボルト** eV がしばしば用いられる．これは電子が 1V(ボルト) の電位差がある空間を走ったときに得るエネルギーである．C(クーロン) と V(ボルト) の積がエネルギー J(ジュール) になることはご存じであろう．ここで 電荷として電子の電荷 1.6×10^{-19}C をとると eV となる．当然のことながら，1eV は 1.6×10^{-19}J である．

核反応の確率をあらわす概念に「**断面積**」がある．原子核の密度を N とし，そこに I の粒子が照射され

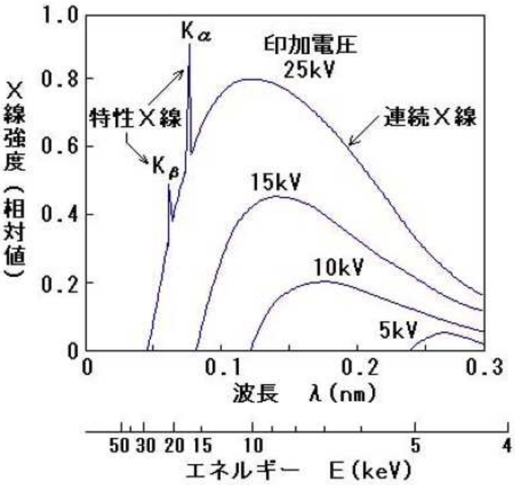


図 11.1: モリブデン陽極から得られる x 線のエネルギースペクトル．特性 x 線のエネルギーは 17.5keV と 19.2keV.

たとする．厚さ dx の物質中で核反応によって失われる粒子数 dI は

$$-dI = \sigma I N dx, \qquad (11.1)$$

と表せる．σ は核反応の断面積といわれ，単位として**バーン**（barn; 10^{-24} cm^2）が使われる．例えば ^{10}B(n,α)^{7}Li, ^{59}Co(n,γ)^{60}Co 反応の断面積はそれぞれ 3800 バーン，36 バーンである．

放射線の発生源は放射性同位体と放射線発生装置である．後者は加速器および核融合装置であると，法令 (放射線同位元素等による放射線障害の防止に関する法律) で定義されている．法令が定めた加速器はサイクロトロン・シンクロトロン・シンクロサイクロトロン・直線加速装置・ベータトロン・ファンデグラーフ装置・コックロフトワルトン型加速装置・変圧器型加速装置・マイクロトロンである (カタカナの表記は法令に従った)．新型加速器ができると法令が追いつかないことになる．

原子のうち，おなじ数の陽子を持ち，異なる数の中性子を持つ原子核からなるものを**同位体 isotope** という．同位体を $^{235}_{92}$U のように書く．235 は質量数，92 は原子番号，U は元素記号である．同位体には安定同位体と**放射性同位体 radio isotope** がある．放射性同位体は放射線を出して崩壊する．このとき出す放射線が α 線・β 線・γ 線であるが，これらを放出する形式 (α 崩壊・β 崩壊・γ 崩壊) の他，軌道電子捕獲・自発核分裂も崩壊形式である．α 崩壊・β 崩壊では同位体は別な原子に変わるが，γ 崩壊は励起状態にある原

子核がより低い励起状態あるいは基底状態に遷移する現象である．β 崩壊には β^+ 崩壊と β^- 崩壊がある．軌道電子捕獲は $p + e^- \to n + \nu$ の変換を起こすので，β^+ 崩壊と見かけ上は同じである．

N 個の放射性同位体の崩壊確率は

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \tag{11.2}$$

あるいは，N_0 を初期値として，$N = N_0 \exp(\lambda t)$ である．λ を崩壊定数，$1/\lambda$ を平均寿命という．よく用いられる半減期 $T_{1/2}$ は $N = N_0/2$ となる時間 t であって，$T_{1/2} = \log 2/\lambda$ である．

放射性同位体には天然に存在するものと，人工で製造するものがある．天然放射性同位体には ^{235}U, ^{238}U のような長寿命の核種を親とする壊変系列に属するもの，^{40}K のようにこの系列に属さない 10^{10} 年台の寿命を持つもの，^{3}H,^{14}C のように宇宙線の核反応で生じるものがある．

^{235}U, ^{238}U はそれぞれ 7.03×10^8 年，4.46×10^9 年の半減期で α 崩壊するので，その放射能は無視しうる程度である．だだしこれらの核分裂の結果生じる核種の多くは「人工」放射性同位体である．また加速器によっても放射性同位体を作ることができる．

中性子はほとんどが人為的に生じる．超ウラン元素の自発核分裂，核分裂の連鎖反応 (原子炉) などである．また α 崩壊する核種を Be などと混ぜ $^9_2\mathrm{Be} + ^4_2\mathrm{He} \to ^{12}_6\mathrm{C} + n$, のような反応で作ることもできる．加速器では (p,n) 反応を用いることが多い．

11.2　放射線・ビームと物質の相互作用

原子・分子のイオン化 (電離) が放射線が物質に与える影響・効果である．このとき放射線はエネルギーを失う．じつは気体中では放射線のエネルギー損失とこのときつくられるイオン対の数の比は放射線の種類にもエネルギーにもよらず，もっぱら気体の種類だけに依存する定数となる．この比を W 値といい，空気の場合は 35eV/ion pair である．

荷電重粒子線と物質ここでいう荷電重粒子とは陽子以上の質量を持つ荷電粒子である．エネルギーを持つ荷電重粒子が物質中に入ると物質を構成している原子・分子をイオン化する．逆に荷電粒子はエネルギーを失う．これを電離損失という．電離損失すなわち粒子が単位長さを走るときに失うエネルギー (Jm^{-1}) はベーテ Bethe によって計算された式

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{\pi e^4 z^2}{4\pi\epsilon_0^2 m v^2} n Z \left[\log \frac{2mv^2}{I(1-\beta^2)} - \beta^2\right], \tag{11.3}$$

がある．ただし m は電子の質量，z, v は入射する粒子の電荷，速度，$\beta = v/c$, Z, n は物質の原子番号と単位体積あたりの原子数，I は電離に必要なエネルギーである．この式は粒子速度が物質を構成する原子の軌道電子の速度より大きい場合に成り立つ．

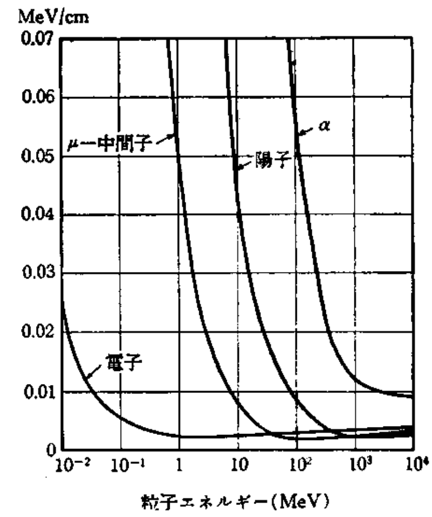


図 11.2: いろいろな荷電粒子の空気中でのエネルギー損失．(参考書 1 による．)

図 11.2 はいろいろな荷電粒子の空気中の電離損失である．電離損失は粒子の電荷の 2 乗に比例する．また粒子の種類によらず，β が無視できる領域では，電離損失は v が小さいときは $1/v^2$ に比例するが，v の増加とともにこの関係からはずれて最小値をとり，再び増加に転ずる．エネルギーが同じであれば，重い粒子ほどエネルギーを失いやすいが，これは v が小さいためである．

粒子が物質中を走る距離の単位として $\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$ がしばしば用いられる．x $\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$ という数値が与えられたとして，そのときの物質の密度を $\rho\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}$ とすれば，粒子が物質中を走る長さは $x\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}/(\rho\mathrm{g{\cdot}cm^{-3}}) = x/\rho$ cm である．$\mathrm{g{\cdot}cm^{-2}}$ を単位とする重粒子のエネルギー損失を図 11.3 に示す．この図の出典は素粒子・原子核の専門誌であり，陽子に換算すれば 10TeV という高エネルギーまで計算の対象となっている．横軸 $\beta\gamma = p/Mc$ において，p, M はそれぞれ粒子の運動量と質量，c は光速，$\gamma = 1/(1-\beta^2)^{1/2}$ である，このような横軸は粒子の質量にかかわらず一般的に使える

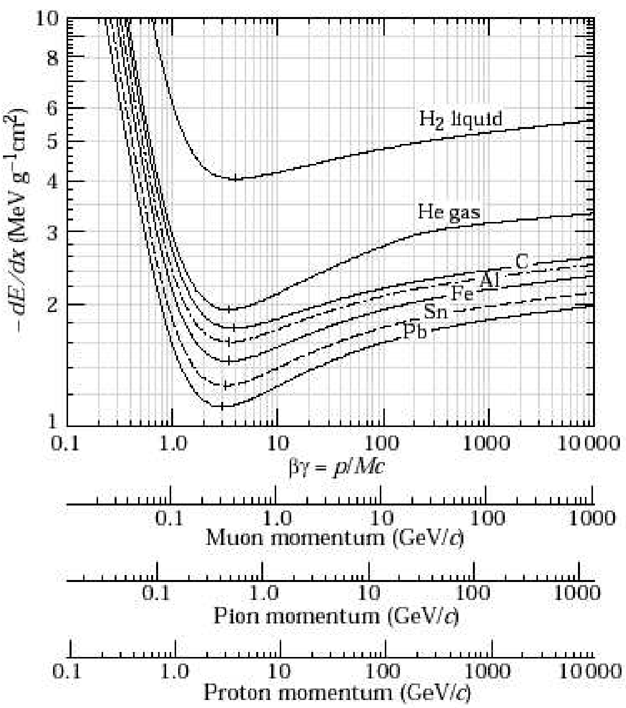


図 11.3: いろいろな物質中の重粒子のエネルギー損失．(S. Eidelman et al., Physics Letters B592 (2004) 1 による．)

が，具体的にミュオン，パイオン，陽子のエネルギー値に対する横軸も 3 本の直線で示してある．なお物質の側から見れば，電離損失は物質が放射線を遮る能力でもある．この意味である物質における電離損失をその物質の阻止能という．

粒子が物質中でエネルギーを失うまで走る距離を**飛程** (residual range あるいは単に range) という．飛程を求めるには式 (11.3) を積分すればよいのであるが，数 MeV から 200MeV 程度の陽子の空気中の飛程は

$$R[m] = (E[MeV]/9.3)^{1.8},$$

で近似できる．

電子線と物質エネルギー E の電子の励起・電離損失は式 (11.3) と類似の以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned}-\frac{dE}{dx} &= \frac{e^4 nZ}{8\pi\epsilon_0^2 mv^2}[\log\frac{Emv^2}{2I(1-\beta)^2} \\ &- (2(1-\beta^2)^{1/2} - 1 + \beta^2)\log 2 \\ &+ 1 - \beta^2], \qquad (11.4)\end{aligned}$$

衝突する電子と衝突される電子の質量が等しいので，1 回の衝突での最大エネルギー損失は重粒子の場合より小さい．ただし衝突後に現れる 2 個の電子の区別が付かないので，この式ではエネルギーの大きい方を便宜上入射粒子とみなしている．エネルギー依存性はすでに 図 11.2 に示した．

電子のエネルギーが 10MeV を越えると放射 (輻射) によるエネルギー損失が無視できなくなる．電磁気学によれば加速を受けた電荷は光子を放出する．シンクロトロン放射は磁場の中で円運動する電子が円の中心に向かう加速度を受けるために放出される光子群にほかならない．物質中では電子が原子核の近傍を通るとき原子核の持つクーロン場から加速を受ける．エネルギー E_0 の電子が原子密度 N 原子番号 Z の物質で受けるエネルギー損失は r_0 を古典電子半径として

$$-\frac{dE}{dx} = -\frac{4r_0^2}{137}Z^2 E_0 N \log\frac{183}{Z^{1/3}}, \qquad (11.5)$$

である．

入射電子のエネルギーが輻射により $1/e$ にまで減少する長さ x_0 を**輻射距離 radiation length** という．この定義により，$E = E_0\exp(-x/x_0)$ であるから，式 (11.5) を変形すれば

$$\frac{1}{x_0} = \frac{4Z^2 r_0^2 N}{137}\log\frac{183}{Z^{1/3}}, \qquad (11.6)$$

となる．

すでに述べたように電子のエネルギーが増大するにつれ励起・電離による損失に対する輻射損失の割合が増加し，ついには大小関係が逆転する．ふたつのエネルギー損失がほぼ等しくなるエネルギーを臨界エネルギーといい，近似的に

$$\epsilon[\mathrm{MeV}] \sim 800/\mathrm{Z}, \qquad (11.7)$$

で与えられる．ただし Z が小さいと誤差が大きい．ちなみに水素の臨界エネルギーは正確には 382MeV である．

光子線と物質光子線は電磁波の別名であって，エネルギーは h をプランクの定数，ν を振動数，λ を波長として $E = h\nu = hc/\lambda$，である．これを使いやすいかたちで書けば $E[\mathrm{eV}] = 4.14 \times 10^{-15}\nu[\mathrm{s}^{-1}] = 1.24 \times 10^{-6}/\lambda[\mathrm{m}]$，となる．ここでは x 線，$\gamma$ 線 (すなわち放射線) とよばれるエネルギー領域の光子線について述べる．x 線は原子が持つ電子の運動状態の変化に起因するもの，γ 線は原子核の壊変にともなって放出されるものを称している．一般に γ 線の方が高エネルギーであるが，エネルギー境界がはっきりしているわけではない．

光子と原子・分子との相互作用の素過程は，光子エネルギーの低いほうから高いほうへの順序で，**光電効果．コンプトン効果（コンプトン散乱），電子対生成**の 3 つである．

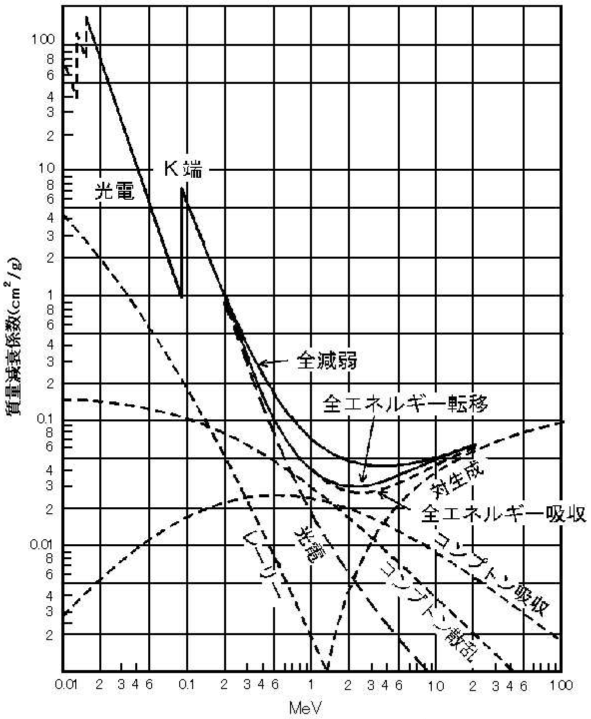


図 11.4: 鉛による光子の吸収．(石川友清 (編) 「放射線概論」通商産業研究社 (1996) による．)

光電効果は光子のエネルギー E が原子核・核外電子の結合エネルギー Φ より大きいとき，光子エネルギーが電子に吸収され，電子が運動エネルギー $E-\Phi$ を持って放出される現象である．K,L,M,... 殻のの結合エネルギーを $\Phi_K, \Phi_L, \Phi_M, ...$ とすれば，$E = \Phi_K, \Phi_L, \Phi_M, ..$ のとき共鳴的に吸収が起こる．

コンプトン散乱では光子はエネルギーの一部を電子に与え，自分は方向と波長を変える．物質中の自由電子または結合エネルギーの小さい核外電子に対して起こる．反跳電子のエネルギーは 0 から最大

$$E_{max} = h\nu - \frac{h\nu}{1 + 2h\nu/(mc^2)}, \tag{11.8}$$

にわたる連続分布で，$E = E_{max}$ にピークを持つ．

電子対生成では光子 1 個が消滅し，電子と陽電子のペアがうまれる．$h\nu > 2mc^2 = 1.02\text{MeV}$ で，原子番号の大きい物質において重要である．生成した電子，陽電子の運動エネルギーを E_+, E_- とすれば

$$h\nu = 2mc^2 + E_+ + E_-, \tag{11.9}$$

である．この過程は原子核付近のクーロン場が原因で起こるので，真空中では起きない．

最初に I_0 個あった光子が，物質中を距離 x 進んだ後の個数を I とすれば

$$I = I_0 \exp(-\mu x), \tag{11.10}$$

である．ここで

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3, \tag{11.11}$$

で，μ を線形吸収係数 (あるいは線型減衰係数) という．また，距離を g cm^{-2} で表したときの係数を質量吸収係数 (あるいは質量減衰係数) という．図 11.4 は鉛の質量吸収係数である．右辺はそれぞれ光電効果，コンプトン散乱，電子対生成の効果をあらわす．

中性子線と物質中性子は中性であるから電気的な相互作用をしない．中性子が原子核のごく近傍まで近づき，核力が及ぶ範囲で起こす原子核反応がただひとつの相互作用である．中性子が原子核に入り込み，その結果 A という素粒子が放出される反応を (n,A) と書く．

(n,n)：中性子が入り込んだ後ふたたび中性子が放出される反応を散乱 scattering という．とくに放出後原子核が励起状態になる/ならないで弾性散乱と非弾性散乱を区別する．弾性散乱では相手の原子核の質量が小さいほど中性子のエネルギー損失が大きい．水素，あるいは水素をふくむ水は原子炉で減速材として用いられる．また散乱の相手の陽子を計測すれば中性子の情報が得られる．

(n,nγ), (n,2n)：これらは非弾性散乱である．(n,nγ) では励起された原子核のエネルギーが γ 線として持ち去られる．

(n,γ)：中性子捕獲 neutron capture とよばれる反応で，原子核が中性子を取り込み励起エネルギーを γ 線として放出する．とくに特定の原子核が特定のエネルギー領域にある中性子と大きな確率でこの反応を起こすことを共鳴捕獲という．

(n,p), (n,d), (n,t), (n,α) など：荷電粒子放出反応．Z の小さい原子核ほど起こりやすいが，これは荷電粒子が突き抜けなければならないクーロン障壁が小さいためである．

$$^6\text{Li} + n \to \alpha + t,$$

$$^{10}\text{B} + n \to {}^7\text{Li} + \alpha,$$

などが代表的．中性子の検出のみならず中性子を吸収するためにも用いられる．

(n,f)：f は fisson．原子核分裂では相手の原子核が二つの原子核と数個の中性子となる．この反応で放出された中性子が次の核分裂を引き起こす．核分裂がとぎれない状態を臨界という．このようにねずみ算的に反応が増えると核爆発となる．連鎖反応を人為的に制御しようとするのが原子炉である．

11.3　放射線と人体

放射線を定量化するために 3 つの SI 組立単位がある．ベクレル Bq, グレイ Gy, シーベルト Sv である．ベクレルは 1 秒間に 1 個の崩壊を起こす放射能ということになっている.「放射能」といわれるとわかりにくいが，ラジウム 1g の放射能は $3.7{\times}10^{10}$Bq である．ラジウムの半減期は 1600 年だが，たとえば半減期が 1 年の元素では，おなじ 1g　でも今日は 10^{10}Bq でも 1 年後には $0.57{\times}10^{10}$Bq に放射能は減少する．Bq を他の SI 単位で表せば s^{-1} である．

グレイとシーベルトは他の SI 単位で表せば，ともに J kg^{-1} である．グレイは吸収線量と呼ばれ，電離することにより，1kg の物質に 1J のエネルギーを与える放射線の量とされる．放射線が物質を通過した際に失うエネルギーと考えて差し支えない．

シーベルトは線量当量の単位である．これは放射線の生物学的影響とくに人体への影響を考慮した単位であって，物理的な見方をすると違和感がある．この単位の周辺では，これまでもこれからも定義が変わったり，新しく意味づけがなされたり，削除されたりということが起こりうる．人体の組織・器官に同じ吸収線量 D(グレイ) が与えられたとしても，放射線によってそれが引き起こす生物学的効果が異なる．そこで線質係数 Q quality factor を導入して放射線の種類による重み付けを行い，線量当量 H を

$$H = QD,$$

により定義する．次のような Q の近似値が与えられている;

x 線，電子，γ 線は 1,

エネルギー不明の中性子，陽子，および静止質量が 1 原子量単位より大きい電荷 1 の粒子は 10,

エネルギー不明の α 粒子，多重電荷の粒子，電荷不明の粒子は 20,

熱中性子は 2.3.

たとえばラットに 7.5Sv の x 線を照射すると 50% が 30 日以内に死亡する．9Sv ではこの確率が 100% となる．

人体が放射線にさらされることを「被曝」，これを防ぐことを「防護」という．体外にある放射線によって被曝することを「外部被曝」，体内に取り込んだ放射性物質の放射線によって被曝することを「内部被曝」という．外部被曝の場合，人体と線源とのあいだに鉛やコンクリートなどの遮蔽物を置いたり（遮蔽する），人体と線源とのあいだの距離を十分にとったり（距離をとる），線源に接する時間を短くすれば（時間を短くする），被曝線量を低く抑えることができる．すなわち、体外被曝の防護は、「遮蔽」,「距離」,「時間」という三つの因子をうまく工夫することが原則である．この原則を「体外被曝防護三原則」と呼んでいる．
しかし体内被曝の場合は，すでに放射性物質が体内に取り込まれているので，体外被曝防護三原則のようなうまい防護手段はない．体内被曝を防護する最良の手段は，放射性物質を体内に取り込まないことにつきる．

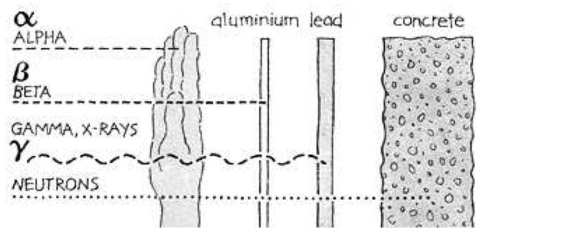


図 11.5: 放射線の遮蔽.

図 11.5 は放射性物質取り扱いの教本などにしばしば見られる，放射線の飛程を直感的にあらわした図である．アルファ線は手のひらで止めるように書いてあるが，むしろ厚紙で止める絵にしたほうが良かったかも知れない．この図から，ガンマ線のほうがアルファ線より「怖い」と結論を下すのは早計である．飛程が短いことはそれだけ単位距離あたりの相互作用が大きいことを意味しているのだ．

短時間に放射線被曝することを「急性被曝」、長期間にわたって放射線被曝することを「慢性被曝」という．急性被曝の代表的な例は、広島・長崎の原爆被爆である．ところで、放射線被曝によって生じた細胞のダメージは細胞内の修復酵素の働きによって修復され、もとの健全な細胞にもどることもある．この効果は、急性被曝よりも慢性被曝の方が大きい．逆に言えば人体が放射線によって受けるダメージは急性被曝の方が慢性被曝よりずっと大きい．

全身が放射線被曝することを「全身被曝」、人体の一部が放射線被曝することを「局所被曝」という．人体の組織・臓器ではリンパ組織，造血組織，粘膜はもっ

とも放射線に対する感受性が強い．

放射線障害は医学的な観点から「身体的影響」と「遺伝的影響」に分類できる．身体的影響とは放射線被曝した本人に現れる障害のことであり、遺伝的影響とは放射線被曝した人の子孫に現れる障害のことである．放射線被曝してからのち症状が現れるまでの期間を「潜伏期」という．潜伏期の長さによって、身体的影響を「早期障害」と「晩発性障害」に分類する．早期障害は放射線被曝ののち数週間以内に症状が現れる放射線障害のことであり、また晩発性障害は放射線被曝ののち数週間を超えてから症状が現れる放射線障害のことである．早期障害には皮膚障害、脱毛、白血球の減少などの造血臓器の障害、生殖腺の障害（不妊）などがあり、晩発性障害にはガン、白内障（目の水晶体が白濁することによって生じる視力障害）、胎児の障害、寿命短縮などがある．

一方、放射線障害は「非確率的影響 (確定的影響)」と「確率的影響」に分類することもできる．非確率的影響は、線量当量がある限界値（しきい値）を超えると誰にでも症状が現れ、限界値以下では誰でも症状が現れない (とされる) 障害である．たとえば胎児の奇形発生のしきい値は 0.1Sv，白血球減少の値は 0.25Sv，脱毛は 3Sv，皮膚の潰瘍は 20Sv とされている．確率的影響は、限界線量が存在しないと考えられている．すなわち，どんなに低い線量当量でもそれなりの発生確率で障害が現れ、線量当量が大きくなるにつれて障害の発生確率が大きくなる．これには癌と遺伝的影響が含まれる．

確率的影響を考えたときに，職業で被爆する成人の線量当量限度は，全身に均等に照射されるときは 0.5Sv/year，また公衆の構成員については 1mSv/year と定められている．ただし見直しが検討されており，現在放射線審議会の「外部被爆および内部被爆の評価法に係わる技術的指針 (案)」が http://www.sta.go.jp /shimon /shingi /houshasen /81221 /gainai2.htm で参照できる．

胃癌の発見のためにおこなうレントゲン検査の際の線量当量は 0.6mSv である．放射線によって被る被害と，検査によって受ける利益のどちらが大きいかで，健康診断を受ける/受けないを決めるべきである．

問題

1. エネルギー 1MeV の陽子・電子のアルミニウム中での飛程を求めよ．また 1MeV のガンマ線の数を 1/e とするアルミニウムの厚さを求めよ．

参考書

1. 岩崎民子「知っていますか?放射線の利用」丸善 (2003).

第12章　放射線とビームの測定 -パルス測定-

12.1　パルス

信号は**連続信号**と**パルス**に分類できる．孤立的な波形をパルスという．今まで述べてきたことは連続信号にもパルスにも当てはまるが，パルス固有の分野も開けている．単一パルスは振幅・パルス幅・パルスの面積などが，また複数のパルス (パルス列) ではおくれ・頻度などがパルスを発生した物理現象に対応した情報を担っている．素粒子・原子核関係の実験ではパルスを扱うことが多い．

ディジタル回路と計算機の章で述べた信号もパルスの一種である．ただし計算機の扱う信号は一定の振幅を持ち，振幅の切り替え (正から負・負から正への変化) は計算機のクロックという定まった周波数に同期して生じた．いなわち，規格化された信号であった．規格化された信号を時間を横軸に，振幅を縦軸に描くと，直角に立ち上がり，しばらく一定振幅を保って，また直角に下がるパルス (方形パルス) になる．ディジタルかいろで扱った信号は実際はこのようなものではなかったが，このように理想化された信号とみなして差し支えなかった．しかし物理現象が生じるパルス信号は千差万別である．現実のパルスは図 ??のようなものであり，この図に書き込んだ用語で特性が示される．

12.2　放射線とビームの検出

放射線の検出は，放射線と物質の相互作用の応用である．この相互作用を利用して，一本の放射線を一発のパルスに変える．その後は電気に処理すればよい．ここではパルスへの変換について述べる．

電気的な検出 放射線は原子・分子をイオン化する．正負の電極をおいて電圧をかければ，イオン化の結果生じたイオンと電子が電極に流れ込む．この電流を検出すれば放射線を検出できる．電離箱 ion chamber,

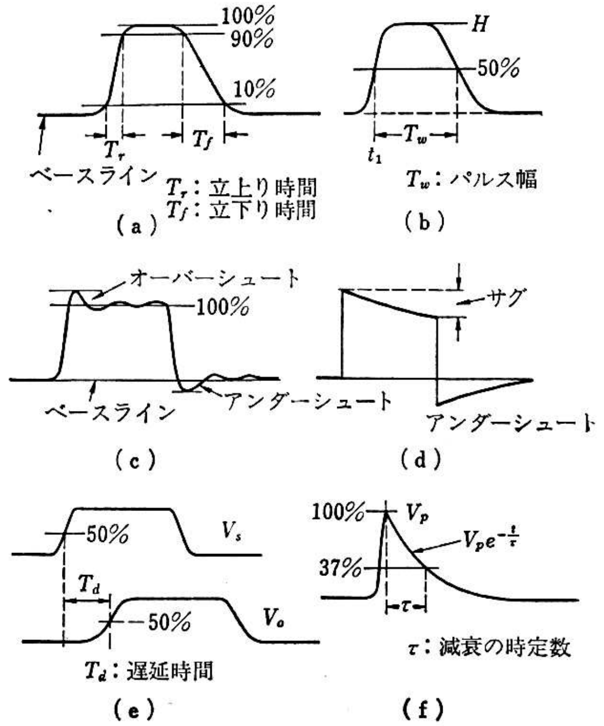


図 12.1: パルス特性の表し方．長谷川賢一「パルス回路」コロナ社 (1980) による．

GM 管 Geiger-Muller Conter,　比例計数管，半導体検出器などがこの原理を用いている．図 12.2 は 電離箱の構造の一例である．円筒形の容器にガスを封入し，中心に電線を張って集電極としただけの単純な構造である．窓と壁の厚さにより計数可能な放射線の種類が定まる．

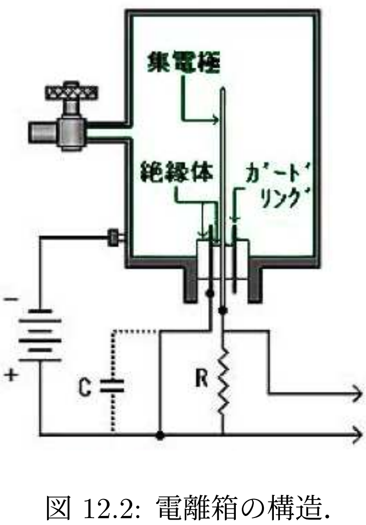


図 12.2: 電離箱の構造.

このようにガスを封入した放射線検出器には，図 12.3 に示す動作領域がある．A の電離箱領域では，

イオン化によって生じた電子と陽イオンは，検出器内の電場中を移動するとき，捕捉されることなくすべて電極に集められる．出力信号の大きさは，初めの電離による電荷に比例する．B の比例計数管領域では，電子は陽極方向へ移動するさい強い電場（ 0.1MeV/cm）中で加速されてエネルギーを持ち，近くの中性原子を電離する．この現象が次々にねずみ算的に多くの電子・陽イオンを発生する．この現象を「電子なだれ」という．比例計数管では、出力信号は初めの電離量に比例するものの，その振幅は数百倍から数万倍に増加される．C のGM計数管領域では，大きな電子なだれの結果励起された原子や分子からの紫外線などによっても電子が発生し，この電子によってさらに他の電子なだれが生じる．そのため，大きな出力信号が発生する．GM計数管には，連続放電を抑制して安定化するために微量の消滅ガスが混入されている．領域 C ではもはや出力信号は初めの電離量に比例しない．この領域を越えると連続放電領域 D となり，検出器は破壊される．信号源がパルスでも，図 refpulse の時定数とパルスの頻度との積が大きければ，検出器からの出力は連続信号になってしまう．ガス封入型検出器の出力はほとんど連続信号である．

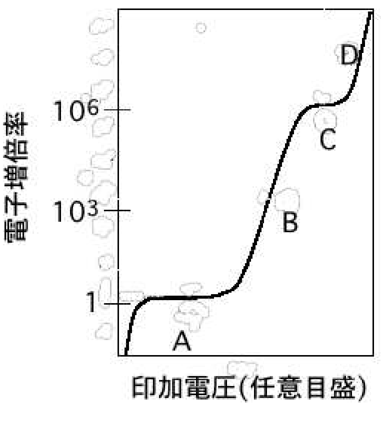


図 12.3: ガスをイオン化する放射線検出器の動作領域.

半導体検出器では放射線は荷電子帯の電子を伝導体に励起して，自由電子と正孔の対 (ペア) をつくる．このペアが気体におけるイオン・電子対と同様な働きをする．すなわち半導体結晶中の電場に沿って，自由電子は陽極方向へ，正孔は陰極方向へ移動する．厳密に言えば，正孔では，隣の中性原子から電子が次々と移動する結果，見かけ上正孔が移動することになる．1 個の電子・正孔対をつくるに要する平均のエネルギーは，Si では 3.62eV，Ge では 2.96eV である．このよう対生成エネルギーが小さいため，放射線のエネルギーを高分解能で測定できる．しかし 2.96eV は温度に換算すると 77K であるため (問　どのように換算するか考えなさい)，Ge 検出器による測定は液体窒素温度で行わなければならない．

光学的な検出 放射線は有機化合物の持つ電子を励起するが，この電子のエネルギー状態が励起準位から下の準位に落ちるときに電磁波を出す．準位間のエネルギー差 ΔE と電磁波の振動数 ν の間には，$\Delta E = h\nu$ の関係がある．この電磁波が可視域にあれば，この光を蛍光あるいは**シンチレーション scintillation** という．物質が透明であれば，可視光を観測することにより放射線を検出できる．蛍光を出す物質をシンチレーターという．プラスチックシンチレータが代表的である．

また，ある種の無機化合物では放射線によって自由電子と正孔がつくられる．正孔は電離エネルギーのより低い活性体原子から電子をもらって中性原子になるが，自由電子は伝導帯中を移動して，活性体原子という励起準位にある不純物原子に捕獲される．この活性体原子が蛍光を放出して基底準位に遷移する．代表的なものにタリウム活性化ヨウ化ナトリウム NaI(Tl) があり，この物質では Tl が活性体原子としてはたらく．

シンチレーターの光出力は図 12.1(f) のような形をしており，減衰時定数は NaI(Tl) では約 250ns，プラスチックシンチレータでは 2-3ns である．このため早い計測にはプラスチックシンチレータが適している．ただし蛍光効率，すなわち放射線が同じエネルギーを失ったときに出る光量は，プラスチックシンチレータは NaI(Tl) の 2 割程度でしかない．

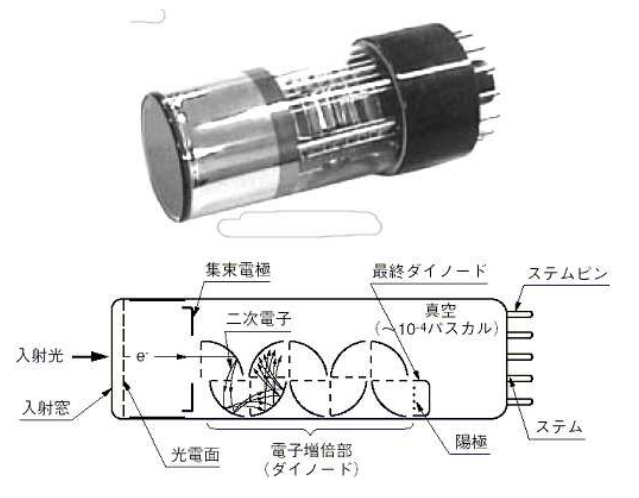


図 12.4: 光電子増倍管.

光を電気信号に変えるためには**光電子増倍管 photomultiplier** を使うのが一般的である．図 12.4 は典

型的な光電子増倍管の外見とその構造を示す．放射線測定では入射窓にシンチレータを密着させる．光電面に光を当てると光電子 photoelectron が飛び出す．この電子を別な電極 dinode に当てるとさらに多数の二次電子を得る．光電子増倍管はこのようにして，最終的には 1 個の光電子から $10^6 - 10^7$ 個の電子を得る．一本の放射線から一発のパルスがえられるが，このパルスの高さ (振幅) は，もとの放射線のエネルギーに比例する．発光時間の特に短いプラスチックシンチレーターと光電子増倍管の組み合わせは時間測定にも用いられる．もちろん光電子増倍管はシンチレータと組み合わせず，単体で光を検出する目的で放射線検出以外にも広く使われている．

飛跡の検出 このほか，電気回路とは関係が薄いが，放射線が物質を通った痕跡 (**飛跡 track**) から放射線を検出する方法があり，空間分布を求めるときに有力である．歴史的には霧箱が有名であり，写真のフィルムを放射線で感光する方法は，健康診断などで現在も用いられている．物理の分野では一時期あまり使われなかったが，計算機による画像処理が発達したので，この方法も再認識されつつある．

最近はイメージングプレート (富士フィルムの商品名) という，光輝尽性蛍光体を塗布した板が用いられる．放射線は固体に電子・正孔対を作るが，光輝尽性蛍光体では自由電子の一部は、F センター (Color Center:色中心を表すドイツ語の Farbenzentrum から名付けられた) と呼ばれる，結晶の陰イオン格子欠陥に捕捉され準安定状態になる．ここにレーザーなどの強い光を当てると，電子はFセンターから追い出され，再び自由電子となり，正孔と結合して発光する．この放射線によるふつうの蛍光が減衰した後で，光の刺激によって新たに生じる蛍光発光現象を輝尽発光・輝尽蛍光等という．この輝尽発光量は初めに当たった放射線量に比例する．この測定は実験終了後行うので，測定できるのは積分値である．またプレートすなわち板は 2 次元なので，蛍光分布から放射線強度の空間分布を知ることができる．

12.3 電磁場中の荷電粒子

荷電粒子ビームのエネルギー測定には，電磁場によって軌道を曲げて測定する方法と，定められた距離を飛行するために要する時間を測定する方法 (**飛行時間法 time-of-flight**) がある．これらの方法ではエネルギーの異なる粒子を位置の関数として，あるいは時間の関数として並べ替えている．並べ替えた後の粒子の検出そのものには前節で示した方法を用いる．飛行時間法は問題として出してあるので，ここでは電磁場による方法を述べる．また粒子速度は光速にくらべて十分小さいものとする．

電磁場 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ 中の質量 m 電荷 e 速度 $\mathbf{v}$ を持つ粒子の運動方程式は

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{12.1}$$

である．

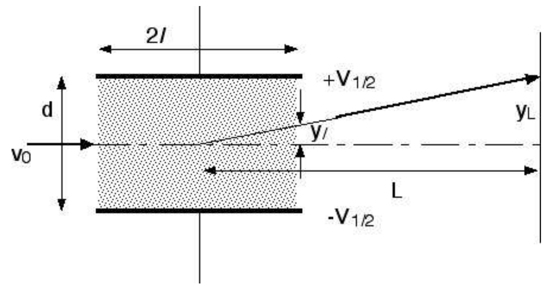


図 12.5: 平行平板中の均一電場による荷電粒子の偏向.

説明のために電場だけが存在する場合と磁場だけが存在する場合を分けて考える．図 12.5 の平行平板中に電場だけが存在する場合は $E_y = -V_1/d$ である．初速度 v_0 で平板に平行に中央に入射された荷電粒子の位置は，電極出口では

$$y_l = \pm(1/2)(e/m)(2l/v_0)^2 E_y,$$

であり，y 方向の速度は

$$v_y = \pm(e/m)(2l/v_0)E_y,$$

である．L だけ離れた検出器にぶつかるときは

$$\pm y_L = y_l + \frac{(L-l)v_y}{v_0} = \frac{lLV_1}{dV_0}, \tag{12.2}$$

となる．復号 $\pm$ は粒子の電荷に応じて選択する．また $eV_0 = mv_0^2/2$ である．

z 方向に磁場だけが存在する場合は，運動方程式を解くと荷電粒子は $x-y$ 平面内で円運動し，その周波数 (**サイクロトロン周波数**) と半径 (**ラーマ半径**) はそれぞれ

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{eB}{m}, \\ r_L &= \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{eE}. \end{aligned} \tag{12.3}$$

であることが導かれる．ただし $v_\perp^2 = v_x^2 + v_y^2$ である．図 12.6 のように均一磁場を区間 $0 < x < 2l$ につくり，検出器を $x = l + L$ に置く．角度 $\theta = 2l/r_L$ と近似すれば

$$y_L = L\theta = \frac{2lL}{r_L} = \frac{2\omega_c lL}{v_0} = \frac{2eBlL}{mv_0}, \qquad (12.4)$$

を得る．

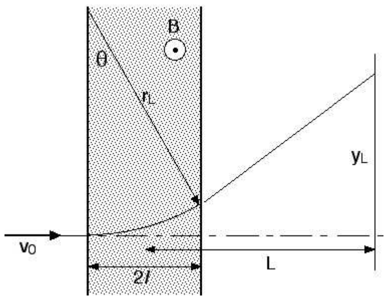


図 12.6: 均一磁場による荷電粒子の偏向.

12.4　パルスの処理

放射線の実験では検出器からのパルスを処理するために，実験の内容に応じていくつかの単機能回路を組み合わせて使うことが多い．逆に言えば，いくつかの単機能回路を**モジュール**として用意しておいて，必要に応じてこれらのモジュールの組み合わせを変えて用いると便利である．これらのモジュールは同じ大きさのシャーシーに収め，ひとつの箱に複数のモジュールを収納するようにシステム化されている．個々のモジュールは共通な電圧を持つ電源を使うことが多いから，モジュール毎に電源を内蔵させるより，共通の大電流電源を用意した方が経済的・機能的である．このような思想により，**NIM (nuclear instruments module)** というシステムができあがっている，

「箱」あるいは筐体に相当するものは NIM BIN と呼ばれている．図 12.7 の上の図は NIM BIN に NIM モジュールを詰めた例である．個々のモジュールの高さと奥行きはどれも同じである．幅も単位が決まっていて，性能に応じて 1 幅，2 幅... などのものがある．図の中と下は 1 幅のモジュール (この場合は以下に述べるシングルチャネル・アナライザー) の前面と背面を横倒しにして示したものである．背面には使用頻度の少ないスイッチ・同軸コネクタの他に大きな四角いマルチ・コネクタがある．上の写真で後ろに飛び出している直方体が電源で，マルチコネクタと接続する．

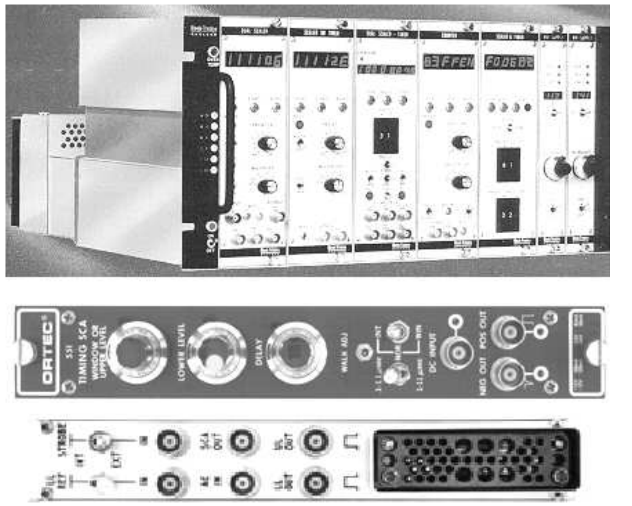


図 12.7: NIM BIN と NIM モジュールの全面と背面の例．NIM モジュールは横倒しに示した.

CAMAC は同じ思想で計算機と信号のインターフェースを規格化したものである．NIM BIN に対応するものはクレート crate と呼ばれ，クレートには 25 までのモジュールが収容できる．クレートコントローラという特殊なモジュールがクレート全体を制御する．クレートコントローラのもとでクレート単体で動作することも出来るが，ブランチ・ハイウェイあるいはシリアル・ハイウェイによって複数のクレートを結合してネットワークを作ることもできる．

物理現象で生じたパルスを測定するために，まず必要となるのはパルスの増幅である．増幅器を信号源のすぐそばに置けないときは，前置増幅器 preamplifier だけでも信号源のそばに置き，主増幅器 main amplifier に導く．信号源・増幅器間の距離が長いとケーブルから雑音が入り込むが，前置増幅器を置けば信号雑音比 (SN 比) を改善することができる．

信号源からのパルスの減衰時間が大きくて，かつパルスの頻度も大きいと，図 12.8(a) のように次々とパルスが重なり合ってしまい，パルス高を正しくはかることができない．この現象を**パイルアップ pile up** という．このような状況でも正しく波高を測定するために，微分回路を挿入したり (図 12.8(a))，(b) の方法 (実は図 6.8 の応用) を用いたりする．

シングルチャネル・アナライザー single channel analyzer はパルス高 V が一定の範囲，V_- と V_+ の間にあるパルスが来ると，ディジタル信号 (規格化された高さのパルス) を出力する回路である．これは**ディスクリミネータ discriminator** という，一定の高さを越えたパルスが来るとディジタル信号を出力する回

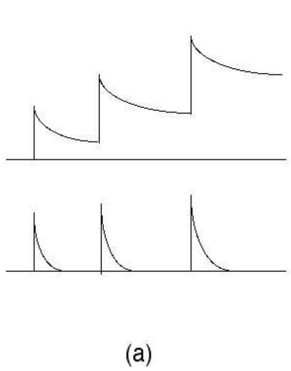


図 12.8: (a) パイルアップおよび微分回路によるパイルアップ対策．(b) ケーブル遅延によるパイルアップ対策．

路をふたつ組み合わせたものである．下限ディスクリミネータは入力パルス高が V_- より大きければディジタル信号を出し，上限ディスクリミネーは入力パルス高が V_+ より大きければディジタル信号を出すように作っておく．ディスクリミネータの実体は後で図 8.10 に示す比較器である．P_+ と P_- が同時に来たときだけ出力を出す回路すなわち AND 回路を通せばシングルチャネル・アナライザーとなる．

スケーラーはこのような条件を満たすパルスが何個きたか数える回路であるが，実体はディジタル回路の章で述べたカウンタである．また二つの回路から同時にパルス入力があったときに限り出力パルスを出す回路を**コインシデンス (coincidence 同時発生) 回路**という．これはすでに述べた AND 回路にほかならない．

マルチチャネル・パルス波高分析器 multi-channel pulse-height analyser は信号源からのパルスの高さの分布 (厳密にいえばヒストグラム) を測定する機器である．図 4.6 の 3 つのスペクトルはそれぞれがマルチチャネル・パルス波高分析器の出力である．マルチチャネル・パルス波高分析器は，シングルチャネル・アナライザーとスケーラーを横軸の点の数だけ持っているのと機能的に等価である．実際のマルチチャネル・パルス波高分析器は AD 変換器を内蔵している．マルチチャネル・パルス波高分析器は N 個のチャネル (計算機の概念でいうアドレスあるいは番地) を持ち，その機能は AD 変換の結果得られた数値が l, m, n であれば l, m, n 番目のチャネルの持つ数値を 1 増やすことである．ただし AD 変換方式は図 8.11 に示した逐次近似方式ではなく，ほとんどウィルキンソン方式である．ウィルキンソン方式では入力パルスでコンデンサを充電し，充電した電荷が完全に放電するまでの時間を，クロックを計数して測定する．逐次近似方式にくらべ， 変換時間は長いが，直線性が良い．

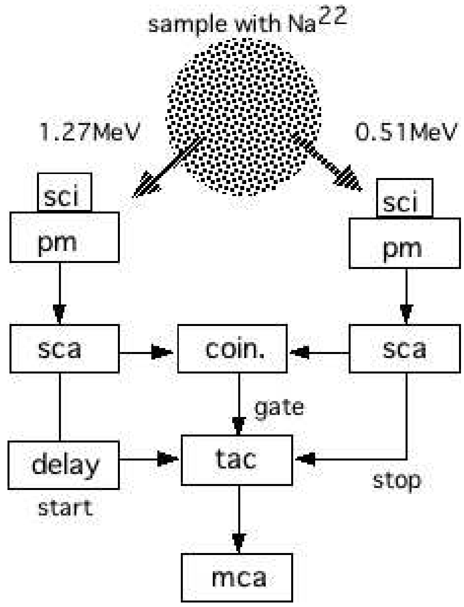


図 12.9: 陽電子の寿命測定のためのセットアップ．

最後に実際の実験でどのようなことをするかを，図 12.9 に紹介するセットアップを例に紹介する．このセットアップは物質中の陽電子の寿命をしらべるためのもので，最終的にはマルチチャネル・パルス波高分析器に図 4.6 のようなスペクトルがえられる．この実験では陽電子は Na^{22} という β^+ 崩壊する元素から得る．β^+ 線は陽電子に他ならない．この陽電子は電子と結合して消えてしまうが，消えるまでの時間 (寿命) は，陽電子が存在する物質の電子状態に依存するので，物性研究の手段となっている．固体の化合物中の陽電子寿命は普通は数 ns である．ちなみに図 4.6 は nm 単位の空孔が存在すると陽電子の寿命が長くなることを示している．

さて，Na^{22} は β^+ を出すのとほぼ同時に 1.27MeV の γ 線を出す．また陽電子と電子が消滅すると，その質量 2×0.51MeV が γ 線として放出される．このとき運動量を保存するために 0.51MeV の 2 本の γ 線が反対方向に放出される確率が最も大きい．そこで 1.27MeV の γ 線が出てから 0.51MeV の γ 線が出るまでの時間間隔を測定して陽電子の寿命とする．

図 12.9 において，sca, coin., tac, delay と示したものは NIM モジュールである．まずガンマ線がシンチレータ sci で光を出し，この光を光電子増倍管 pm がパルスに変える．このパルスの振幅はガンマ線のエネルギーに比例している．図では左のシングルチャネルアナライザ sca モジュールは 1.27MeV のガンマ線が

来るとディジタル信号を発生し，右の sca は 0.51MeV のガンマ線が来るとディジタル信号を発生する．tac は時間波高変換器 time-to-amplitude converter と称するモジュールで，ふたつのディジタル入力の時間差に比例した振幅を持つパルスを発生する．

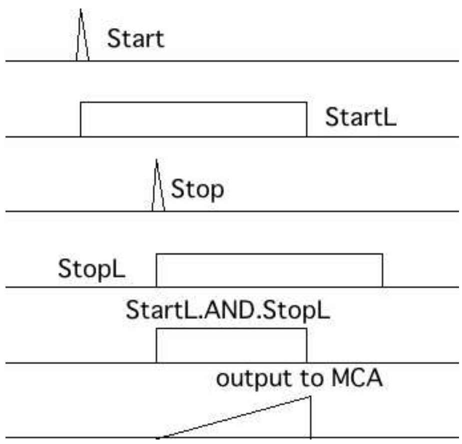


図 12.10: 時間波高変換器の動作.

図 12.10 は時間波高変換器の動作である．スタートパルス (図の Start)・ストップパルス (Stop) とも短いパルスだが，これらからパルス長 τ を持つ長いパルス (図の startL, StopL) をつくる．このふたつの長パルスの AND をとった結果できるパルス (図の StartL.AND.StopL) の継続時間は，スタート・ストップの時刻が一致したとき最長 τ となり，ストップパルスが遅れるに従って短くなり，ずれが τ より大きくなるとゼロになる (AND をとってもパルスはできない)．この StartL.AND.StopL パルスを積分して得られるノコギリ波の振幅はスタート・ストップの時間差と線型に関係するので，これをマルチチャネル・パルス波高分析器に送ればよい．なお，図 12.9 の delay はパルスを遅らせるモジュールである．図 12.10 ではストップパルスが遅れるほど出力の振幅は小さいが，スタートパルスを適当に遅らせると，ストップパルスが早いほど，すなわち遅れが小さいほど出力の振幅を小さくすることができる．図 12.9 の coin. はコインシデンス回路であって，ふたつのシングルチャネルアナライザの出力がある許容時間内にあるときに同時に出力があったとみなし，時間波高変換器にゲート gate 信号を送る．図 12.10 の一連の動作はゲート信号があったときに限り起こる．

問題

1. 陽子が距離 L(単位は m) を飛行するのに t 秒かかる．

   (1) この t を測定して陽子エネルギー E を求める式を書け．ただしエネルギー E の単位は電子ボルトとする．陽子質量を M，電子の電荷を e とする．

   (2)L=1m, t=1μs のときのエネルギー E を求めよ．ただし $M = 1.6 \times 10^{-27}$kg,$e = 1.6 \times 10^{-19}$C とする．

   (3) (2) においてエネルギーを eV の精度まで求めるために必要な t の測定精度を求めよ．

2. 式 (12.1) から式 (12.2) および (12.4) を導け．

3. 荷電粒子のエネルギー測定には，検出器にマルチチャネルアナライザーを組み合わせる方法，電磁場を用いる方法，時間飛行法などがある．どのような場合にどの方法を用いるかを考察しなさい．

参考書

1. 三浦　功，菅　浩一，保野恒夫「放射線計測学」裳華房 (1960).

2. 加藤貞幸「放射線計測」培風館 (1994).

第13章　実験装置・機器の製作

13.1　製作の外注

実験に必要な大道具・小道具のたぐいを，大きなものから設備・装置・機器・器具という．ただしこれらの境界ははっきりしたものではない．これらを自分で作ることもあるが，買うこともある．既製品として売っているものを買うのはたやすいが，特殊なものは作ってもらう (金を払って作らせる) ことになる．外部に注文するので「外注」という．

外注するためには必要事項をまとめた「仕様書」を相手に渡し，「見積書」をとる．仕様書には，納期すなわち何年何月何日までに，納入場所すなわちどこに持ってきて貰うかを明確にする．仕様書は材料を指定し，図面を添付し，すぐに製作にかかれるように書く場合と，どういう性能で，どの程度の大きさ，でどの程度の消費電力で... という書き方をする場合がある．前者を「製作仕様」後者を「性能仕様」ということがある．後者は設計も依頼することになるので，当然高価につく．

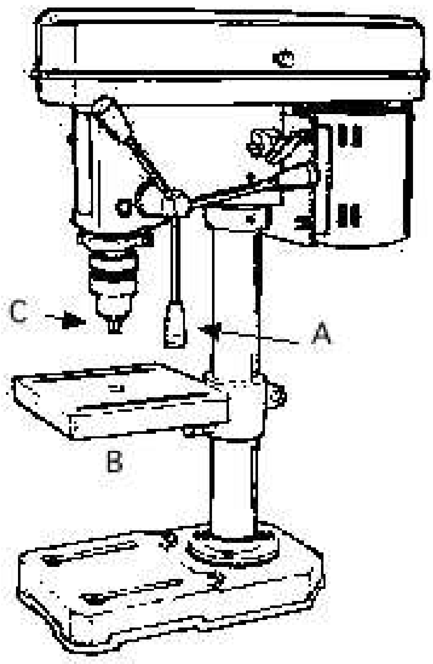


図 13.1:　ボール盤．C にドリルを固定して回転させ，A で上下させて，B に固定した板に穴をあける．(http://www.mech.eng.himeji-tech.ac.jp/kikai/center/jisshuu/jisshuu.html による．)

13.2　機械加工の材料と要素

物理実験で必要な装置・機器・器具の類の大部分は金属を加工して作られる．まず考えるべきことは材料の選択である．荷重，導電性，熱伝導性，腐食に対する強さ，磁性，加工のしやすさ，真空容器中で使うか否か，最後には価格などを総合的に検討すべきであるが，最初はベテランに相談するしかない．金属ではなく，ガラスやプラスチックの使用も考慮したほうがよい場合もある．

材料は柱や板として供給される．これらをまず工作用の機械で成型する．ドリルで円形の穴をあけるのは図 ??の**ボール盤**で，いうなれば電動錐である．語源は井戸掘りのボーリングと同じで，bore すなわち「穴をあける」という動詞である．C にドリルを固定して回転させ，A で上下させて，B に固定した板に穴をあける．ボール盤くらいは自分で扱える必要がある．

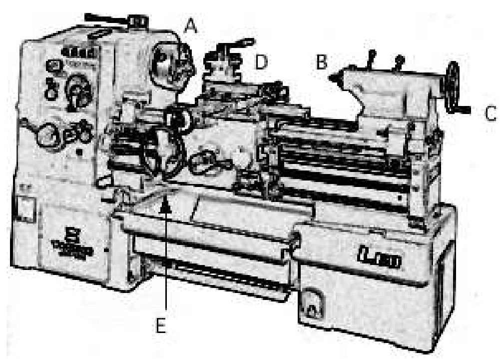


図 13.2: 旋盤．C を操作し AB 間に材料を固定・回転させる．D に固定した刃物 (バイト) をハンドル E で材料に押しつけて加工する．(http://www.mech.eng.himeji-tech.ac.jp/kikai/center/jisshuu/jisshuu.html による．)

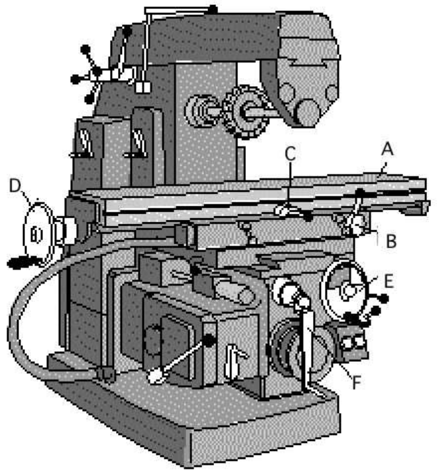


図 13.3: フライス盤．テーブル A に材料を固定し，B の刃物が回転する．テーブルを C・D で左右，E で前後，F で上下に移動する．図は主軸が横なので，横フライスという．(http://www.mech.eng.himeji-tech.ac.jp/kikai/center/jisshuu/jisshuu.html による．)

より高度な工作には**旋盤，フライス盤**などを用いる．旋盤を図 13.2 に示した．C を操作し AB 間に材料を固定・回転させる．D に固定した刃物 (バイト) をハンドル E で材料に押しつけて加工する．外丸削り・正面削り・ねじ切り・中ぐりなどの軸対象な加工が可能である．東北地方の名物に「こけし」があるが，これを作るための日本古来の機械も旋盤と同じ動作をする．

いっぽう円筒の外周に多数の刃を持つフライスと呼ばれる工具を回転させ，加工物に送り運動を行なわせて平面および曲面を削り出す工作機械をフライス盤と呼ぶ．図 13.3 において，上の方で水平軸の周りで回転するのがフライスである．この図はじつは横フライス盤と呼ばれる物であって，回転軸が鉛直方向にある縦フライス盤もある．

成型した後は．溶接などを用いることもあるが，ボルトとナットで組み立てることが多い．なお穴あきアングルのように切断するだけで，専用のボルト・ナット・アンカープレートを使って容易に実験架台が組み立てられる材料もある．

ねじには「おす」と「めす」がある．現在締め付け用として普及しているのはメートル並目ねじの規格であって，M6P1 等と指定する．M の後の数値はおすでは外径，めすでは谷の径である．P の後の数値はピッチである (図 13.4 参照)．M6P1 は径 6mm ピッ

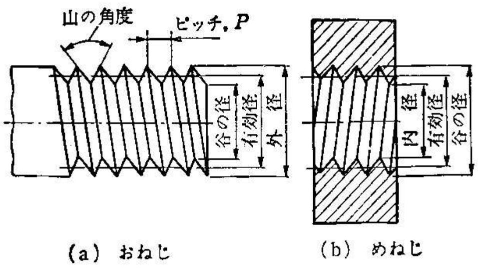


図 13.4: ねじ．

チ 1mm を意味する．金属にねじをきる道具が「タップ」と「ダイス」である．

ふつうのねじはすべて右ねじである．すなわち時計方向に回すと締まる．ただし特殊な場合に左ねじが使われる．たとえば特定なガス用のボンベの口がね，ある種の自動車部品などである．

比較的小さいボルトをビスという．頭の形状でなべ，さら等の種類がある．また頭にはドライバー用の溝や穴があり，これをすりわり (マイナスドライバー用)，十字穴 (プラスドライバー用)，六角穴 (六角レンチ用) などと呼ぶ．緩みとどめとして座金 (ワッシャー) が用いられる．バネ座がね (スプリングワッシャー) もある．固定する相手にめすねじをきり，ボルトを固定する方法と，ボルトを貫通させ，反対側からナットで締めて固定する方法もある．

13.3　機械製図

なにか新しいことを始めようとすると，そのための装置機器や器具が必要になる．これらを専門家に作ってもらうとき，何を作ってもらいたいかを伝えるのが図面である．もちろん自分で作るときも，まず設計を図面というかたちに具体化することは必要である．

製図といえば，からす口というペンの一種で紙に線を引くというイメージがあった．今では CAD (computer-aided design) が主流となっている．しかし道具に何を使おうと，本質は変わらない．

図面の描き手と読み手の間には共通の認識が必要である．そのためには規格に則って製図をおこなわなければならない．ここで述べることがらは，主として日本工業規格 JIS の機械製図に従っている．

立体を平面上に表現するためにもっともよく用いられるのが投影法である．これは平行光線を当てたときの陰によって物体を表現する方法である．光線の方向は物体を代表する面と垂直になるように選ぶ．この方

法を正射影という．図 13.5 のように無限に大きい平

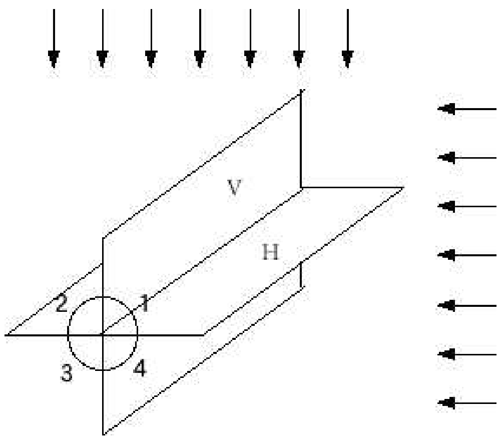


図 13.5: 2 面のなす角で区切られた 4 空間．これらを第 1 角，第 2 角，第 3 角，第 4 角とよぶ．

面で空間を 4 分割すると仮定しよう．これらを反時計回りに第 1 角，第 2 角，第 3 角，第 4 角とよぶ．これらの角に物体をおいてその影をふたつの平面につくる．このとき光は図の方向から来るものとする．第 2 角と第 3 角では V 平面に影ができないが，このときは光の当たる面を V 平面に描くことにする．同様に第 3 角と第 4 角では H 平面に影ができないが，やはり光の当たる面を H 平面に描くことにする．つぎにこれらの直角をなすふたつの投影図をのばして平面化するのだが，このとき反時計回りの方向で下流にある面が下になるようにのばす．

実際に用いられるのは第 1 角と第 3 角である．日米では**第 3 角法**が主流で, JIS もこれを採用している．ヨーロッパでは第 1 角法が主流である．図 13.6 は同じ物体を第 1 角法と第 3 角法で描いた例である．第 3 角法ではすなおに，見える側に図が来ることがわかる．第 3 角法では平面図が上，正面図 (立面図) が下に配置されるが，第 1 角法では逆になる．

平面図と正面図だけでは理解が得られにくいときにはもっと別な方向への投影図を追加する．直交座標に基づいているので，6 方向の投射図が可能である．これらを平面図・正面図・右側面図・左側面図・底面図・背面図という．物体をどの方向に投射したものを正面図とするかは好き好きである．平面図と正面図だけで理解を得ようとしたとき、正面図をどうとるべきか考えて決めればよい．ただし物体の置き方に天地 (上下) があるとき，天から見た図を平面図とすることは常識である．図 13.7 はこれら 6 つの投射図とその配置を第 1 角法と第 3 角法について示したものである．

線の用法にも一般的な了解がある．太い実線は外形

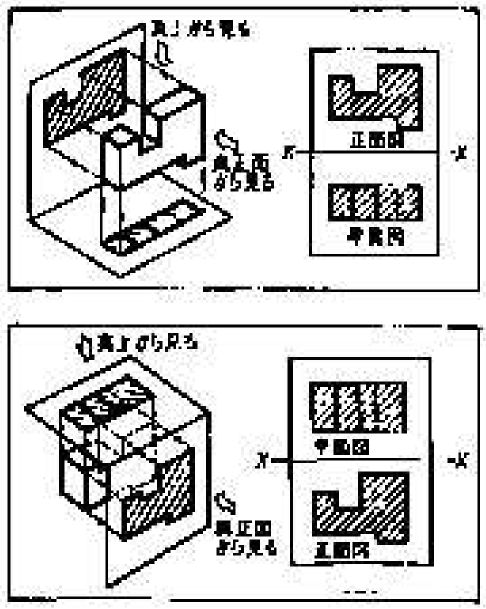


図 13.6: 同じ物体を第 1 角法と第 3 角法で描いた例．(参考書 1 による．)

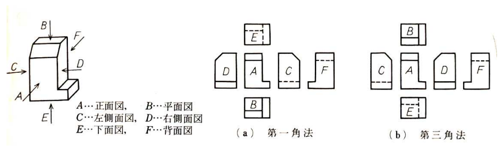


図 13.7: 物体を第 1 角法 (a) と第 3 角法 (b) で描いたときの 6 つの投射図とそれらの配置．(参考書 1 による．)

線，細い実線は寸法線や寸法引出線，波線はかくれた外形線，細い一点鎖線は中心線，などである．

また紙の上に描くためには大きな物体は縮小し，小さいものは拡大しなければならない．このために寸法を記入するだけでなく，尺度も記入するのが普通である．

寸法はミリメートルを単位に記入する．単位は決まっているので mm の文字は不要である．角度は度を単位とし，分・秒を補助的に用い，図面には「^{0}」,「'」,「"」を記入する．寸法の数字は水平方向の寸法線には図面の下から読む方向，垂直方向の寸法線には図面の右から読む方向に記入する．寸法を寸法線に重ねたり寸法線を中断して記入することはしない．図 13.8 に寸法の記入例を示した．図 13.8 の左上の「R50」は半径 50mm の円弧で角にまるみをつけるという意味である．この「R」のたぐいを寸法補助記号という.「R」のほかに,「ϕ」を直径,「t」を板厚を表すために用いる．

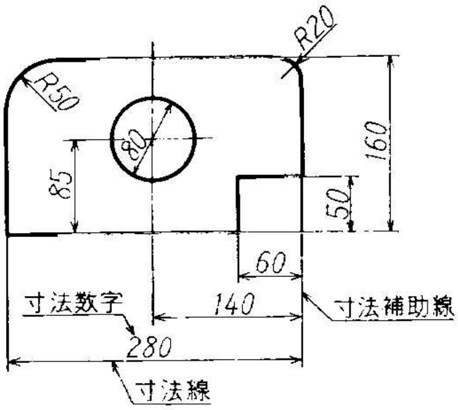


図 13.8: 寸法の記入．(参考書 1 による．)

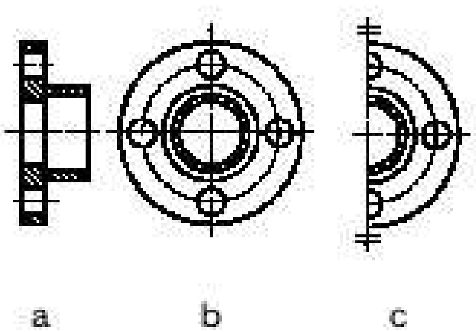


図 13.9: 断面図と対称図形の省略．(参考書 1 による．)

図 13.9(a) は断面図であって，仮に (b) の一点鎖線で切断したと仮定したときの断面を示す．ハッチングは仮の断面であることを強調している．この例のように対称性のある物体を描くときは (c) のように中心線の片側を省略することができる．中心線の両端の短い 2 本の平行線は対称図示記号といい, 片側省略を示している．この対称図示記号なしで， (a) と (c) だけだと，半月形の物体が工作される可能性がある．

13.4　電気・電子回路の工作

電気・電子回路工作は機械工作に比べ自分で手を下して行うことが多い．機械製図に対応するものは回路図である．機械製図ができる人が機械加工ができるとは限らないが，回路図が描ける人は回路製作の能力もあるのではないかと思う．

プリント基板に載せられたいくつかの回路部品を fig. 13.10 に示した．　(受動的な) 回路部品の代表は抵抗とコンデンサである．抵抗にはいろいろな種類 (巻き線抵抗，炭素皮膜抵抗など) があり，用途によって選択する必要がある．抵抗値は 10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 46, 68, 82 という数列で整備されている．これらは抵抗の精度とともにカラーコード化されて，抵抗の縞模様となっている．精度の良い (誤差 2% 以下) の抵抗の縞は 5 本，悪いものは 4 本である．また許容できる消費電力があり，1/2W,1/4W 等という．電力が指定値を超えると，抵抗が燃える．可変抵抗もある．図では 1/4W の抵抗が多数と，1W の抵抗が記号 g の左にある．また a,c は可変抵抗，いわゆるボリュームである．

コンデンサは抵抗よりもはるかに種類が多い．図 d の右あたりにいくつかある円盤をたてたようなものがセラミックコンデンサで，周波数特性は良いが値は温度特性が悪い．また i は電解コンデンサで，どちらの端子を電圧の高い側に使うかが指定されている．μF, pF でよばれ，なぜか nF という単位は用いられない．h はコイルで，この場合は相互インダクタンスを得るために用いている．

IC すなわち集積回路は TO-5 あるいは dual-in-line と称するパッケージに入っている．現在は図の dual-in-line が主流である．どの足 (ピン) が入力，どれが出力... といったことをはじめ，もろもろの情報はそれぞれの IC のデータシートを参照する必要があり，各メーカーのホームページからダウンロードすることができる． dual-in-line パッケージのピンの間隔は規格化されているので，この間隔にあわせて穴をあけた，様々なデザインのプリント基板が出回っている．

電子回路は多くの場合プリント基板に回路素子をはんだ付けし，電線でこの間を結び，シャーシーとよばれる金属箱に入れることで完成する．シャーシーとプリント基板，シャーシーと外部との接続にはコネクターを用いる．図の b と j はコネクターで，b は信号用，j は電源供給用である．シャーシーはラックに取り付けるようにすると便利な場合もある．はんだ付けにははんだとはんだごてが必要である．はんだ付けしたものを取り去るにははんだ吸い取り器という道具がある．これははんだをはんだごてで溶かして，すかさずポンプで吸い取るものである．回路製作にはこのほかニッパー (電線を切る工具)，プライヤー (電線を曲げる工具)，ワイヤストリッパー (電線の被覆を取り去る工具)，ピンセットなどを用いる．

実験用に 1 つだけ回路を作る場合には，万能型 (ユニバーサル型) と称するプリント基板が便利である．ガラスエポキシ樹脂やベークライトなどの絶縁薄板に

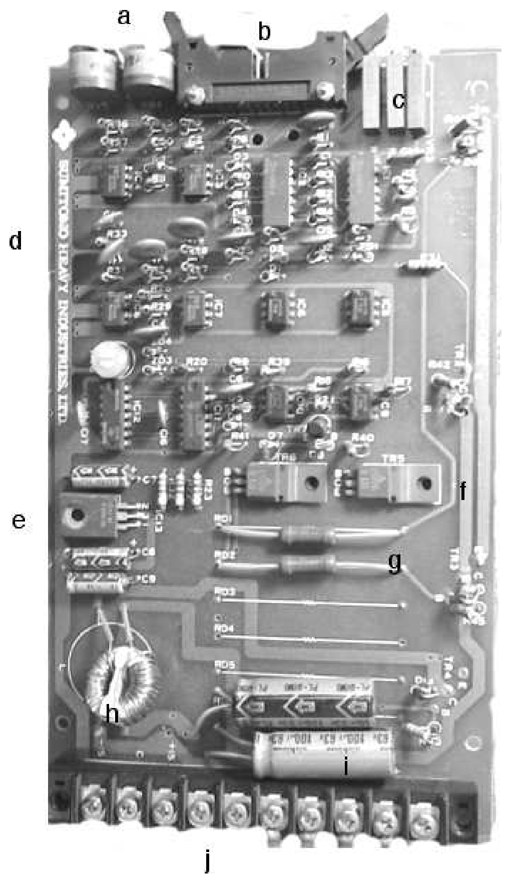


図 13.10: プリント基板上のいくつかの回路部品．本文参照.

銅のパターンを張り付けたもので，ディジタル集積回路の足のピッチ (0.1 インチすなわち 2.54mm) の穴があいていて，ここに回路素子をつっこみはんだで固定する．ただし 100MHz 以上の高周波回路や，ナノ秒台以下のパルス回路を作るには銅箔べた基板を使う必要がある．図のように製品として量産される回路は，その回路専用の基板の上に作られている．

TTL ディジタル集積回路は +5V，演算増幅器の集積回路は ±15V の直流電源を必要とする．AC100V の交流電源からこれらの直流電源に変換するパッケージが市販されているので，これらをシャーシーに内蔵することもできる．シャーシーとしてすでに述べた NIM モジュールを利用することもできる．工作用に中身のないブランクモジュールも市販されている．

コネクターのピンに電線を接合する方法にははんだごてを使うほかに，圧着による方法，ワイヤラップ法がある．あとの二つの方法では専用の工具を必要とする．

13.5　オシロスコープ

オシロスコープは電圧波形を視覚化するもので，物理科学実験はもちろん，回路の製作のためにも必要不可欠な道具である．オシロスコープのブラウン管では，カソードで電子が発生し，電極で加速される．ブラウン管でわれわれが目にする部分の内側には蛍光物質が塗布されていて，ここに高速電子が衝突するとそのスポットが発光する．

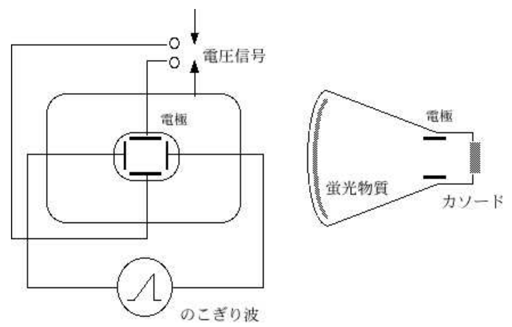
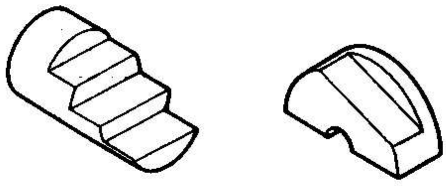


図 13.11: オシロスコープの動作.

図 13.11 に示すように電極は水平方向，垂直方向の 2 対がある．垂直方向には観測したい繰り返し信号を加える．水平方向にはオシロスコープに内蔵した繰り返しののこぎり波 (鋸歯状波) が加えられる．”NORMAL” と呼ばれるモードでは信号の繰り返しとのこぎり波の繰り返しが同期するので，電圧波形の時間変化がブラウン管上で観察できる．図では省略したが，入力信号は増幅し，ブラウン管上で見やすい大きさとされる．もちろん信号の大きさ (電圧値) も読みとれる．このように観測する信号そのものでのこぎり波を発生する方法を内部同期という．これに対し，外部から ”EXT” という入力端子に同期信号を供給し，この外部信号でのこぎり波を発生する方法を外部同期という．この同期信号のことをトリガー trigger ということがある．銃の引き金の意味である．一度限りの現象を観測するためには，”SINGLE” というモードを用いる．ここではのこぎりの歯 1 個ぶんだけが発生する．現在では信号をいったん AD 変換してメモリに蓄え，これを DA 変換してブラウン管に表示する，いわゆるディジタル・オシロスコープが主流である．

問題

つぎのふたつの物体の平面図・立面図・側面図を第3角法で示せ.



参考書

1. 山中秀男「図面の見方 (第3版)」共立出版 (1992).
2. 霜田光一，桜井捷海「エレクトロニクスの基礎 (新版)」裳華房 (1983).